گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۲۹ آبان‌ماه ۱۴۰۴

نیم‌سال اول دوازدهم $\frac{۲}{۸}$

پایهٔ دهم $\frac{۱}{۵}$

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	محمد پورسعید ـ علی منصف‌شکری سوگند روشنی ـ رسول حاجی‌زاده	مهرداد اسپیدکار مائده بادان فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ محمد حصاری علی اسدی ـ فؤاد خیرآبادی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ سجاد صادقی‌زاده محمدجواد سورچی ـ حسین عبدوی‌نژاد مهدی پارسا ـ کامران ابراهیمی ـ سارا قانع مهدی یوسفی ـ میثم دشتیان امیررضا خوینی‌ها ـ محسن قندچلر حامد نبی‌منصور	حامد نبی‌منصور ـ حنا خلعتبری امیررضا رضایی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ بهمن بازرگانی فرهنگ امیری ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد ـ محمدعلی مؤمن‌زاده	فرهنگ امیری ـ رامین رزمجو محمدرضا جمشیدی محمد داودآبادی فراهانی محمد سلامی

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان — نازنین امیری

مائده بادان‌فیروز — زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور- قسمت ۱۱

تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی مهم‌اند؟

در مقالهٔ قبلی گفتیم بعضی از پاسخ‌های غلط به خاطر فراموشی هستن و بعضی از سؤال‌های نزده هم دقیقاً به همین دلیل سفید می‌مونن.

یاد گرفتیم که با روش مطالعهٔ سه‌مرحله‌ای (۵ دقیقه تیترخوانی، ۶۰ دقیقه مطالعهٔ فعال و ۱۰ دقیقه مرور)، میشه مطالب رو توی ذهن ماندگار کرد.

همچنین گفتیم یادداشت‌برداریِ فعال باعث مرور ذهنی میشه و جلوی فراموشی رو می‌گیره.

در نهایت هم اشاره کردیم که تست دروس خوندنی رو باید ۴۸ تا ۷۲ ساعت بعد از مطالعه زد تا بفهمیم واقعاً چه چیزهایی یادمون مونده.

اما حالا می‌خوایم بریم سراغ یکی از بخش‌های حیاتی یادگیری که خیلیا ساده ازش رد می‌شن:

تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی.

چرا تمرین‌ها اینقدر مهم‌اند؟

خیلی از دانش‌آموزا بعد از خوندن یه مبحث، مستقیم میرن سراغ تست. در حالی که تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی، آینهٔ واقعیِ فهم تو از مطلب‌ان.

وقتی تمرین رو خودت حل می‌کنی، مغزت درگیر ساختن مفهوم میشه، نه فقط حفظ کردنش.

از اون مهم‌تر، خیلی از سؤال‌های کنکور دقیقاً از همین تمرین‌ها الهام می‌گیرن.

طراح‌ها ایدهٔ سؤال‌های سخت و مفهومی رو از مثال‌های کتاب و فعالیت‌های انتهای فصل می‌گیرن، پس اگه بر اون‌ها مسلط باشی، در واقع داری ذهن طراح کنکور رو می‌خونی!

تمرین، پلی بین فهم و تست زدن

بدون تسلط روی تمرین‌ها، رفتن سراغ تست مثل راه رفتن توی یه شهر غریبه‌ست؛

هرچی بیشتر می‌ری، بیشتر گیج می‌شی!

ولی وقتی تمرین‌ها رو حل کرده باشی، اون شهر برات آشناست، خیابوناشو می‌دونی، مسیرهاش برات روشنه.

تمرین‌ها نقشهٔ راه یادگیری‌ان.

باعث می‌شن مطلب توی ذهنت جا بیفته، مسیر فکریت شکل بگیره و موقع تست زدن، ذهنت ناخودآگاه مسیر درست رو یادآوری کنه.

هر تمرینی که حل می‌کنی، یه گام بزرگ به سمت تسلط واقعیه.

خیلی وقتا هم موقع تمرین، متوجه اشتباهات کوچیکی می‌شی که اگه مستقیم سراغ تست می‌رفتی، نمره ازت می‌گرفتن.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

مسیر درست یادگیری

۱. یادگیری مفهومی:

از کلاس، ویدئو یا کتاب درسی مفهوم رو خوب بفهم.

۲. تمرین و مثال:

با تمرین‌ها درگیر شو تا مطلب در ذهنت تثبیت بشه.

۳. تست کنکورهای اخیر:

حالا برو سراغ تست‌های کنکور تا بفهمی طراح از همین مفاهیم چطور سؤال می‌سازه.

۴. تست تألیفی و چالشی:

در مرحلهٔ آخر، با تست‌های تألیفی سطح بالا خودت رو به چالش بکش تا ذهنت آمادهٔ هر نوع سؤال بشه.

ضرورت و اهمیت تمرین‌ها

ضرورت

- اگه تمرین‌ها و مثال‌های کتاب رو حل نکنی، یادگیریت سطحی می‌مونه.
- فکر می‌کنی مطلبو بلدی، اما موقع تست زدن گیج می‌شی و وقتت تلف میشه.
- مثل کسی که توی شهر غریبه دنبال آدرسه و مسیرها رو بلد نیست.
- بدون تمرین، تسلط واقعی شکل نمی‌گیره.

اهمیت

- وقتی روی تمرین‌ها مسلط باشی، مغزت مفهوم رو می‌سازه، ذهنت منظم میشه و موقع تست زدن با اعتمادبه‌نفس جلو می‌ری.
- با طرز فکر طراح آشنا می‌شی، مسیر حل رو سریع پیدا می‌کنی و احتمال اشتباهت کم میشه.
- هر تمرین مثل یه نقشه‌ست که راه یادگیری رو برات روشن می‌کنه.

جمع‌بندی آخر...

تمرین‌ها رو فقط به چشم «تکلیف» نبین؛ اونا در واقع شبیه تمرینای پرنسازی ان.

کسی که فقط درباره تمرین حرف می‌زنه قوی نمی‌شه، بابدعضلات ذهنش رو با حل مثال‌ها بسازه.

هر تمرینی که حل می‌کنی، به عضله‌ی تازه توی مغزت رشد می‌کنه!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ صفحه ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول و دقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: مثلثات، صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴
ریاضی پایه:مثلثات، ریاضی ۱ صفحه‌های ۲۸ تا ۴۶، حسابان ۱ صفحه‌های ۹۱ تا ۱۱۲
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها ، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱
هندسه پایه: چندضلعی‌ها، هندسه ۱ صفحه‌های ۵۳ تا ۷۳
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (از ابتدای فعالیت تا ابتدای حل معادله سیاله)، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵
آمار و احتمال: احتمال، صفحه‌های ۴۴ تا ۶۸

سهم در کنکور

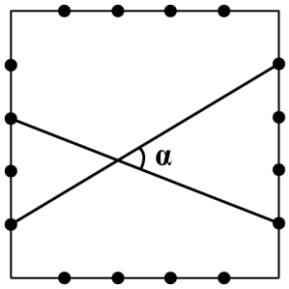
حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۶ تستِ کنکور را پوشش داده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۱۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه پایه: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
گسسته: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!

یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامهٔ ویدئویی

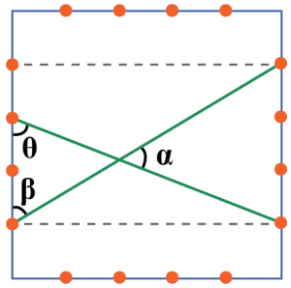
۱- در مربع شکل مقابل هر ضلع به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۱۹}$
۲) $\frac{۲۵}{۱۷}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

مجموع زوایای داخلی در هر مثلث ۱۸۰° است، پس داریم:



$$\tan\alpha=\tan(\pi-\theta-\beta)$$

با استفاده از روابط نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل داریم:

$$\tan(\pi-(\theta+\beta))=-\tan(\theta+\beta)$$

با استفاده از تانژانت مجموع دو زاویه داریم:

$$-\tan(\theta+\beta)=-\frac{\tan\theta+\tan\beta}{۱-\tan\theta\tan\beta}$$

در نتیجه:

$$\tan\alpha=-\frac{\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۳}}{۱-\frac{۲۵}{۶}}=\frac{۲۵}{۱۹}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲- معادلهٔ $\cos 4x+\cos x=0$ در بازهٔ $[0,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا جواب‌های کلی معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 4x+\cos x=0 \Rightarrow \cos 4x=-\cos x$$

$$\cos 4x=\cos(\pi-x) \Rightarrow 4x=2k\pi\pm(\pi-x)$$

$$\begin{cases} 4x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow 5x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5} \\ 4x=2k\pi-\pi+x \Rightarrow 3x=2k\pi-\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر k جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارند را می‌یابیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5},\frac{\pi}{3}$	π

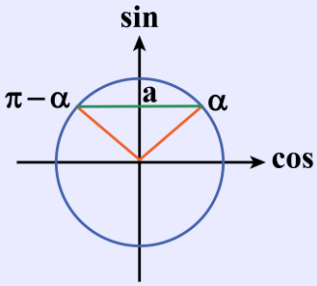
بنابراین معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ دارای ۴ جواب است.

معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی معادله‌ای است که مجهول آن (x) در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مثلاً معادلهٔ $\sin x=\frac{1}{2}$ یک معادلهٔ مثلثاتی است که با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی، نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. اگر در یک طرف به جای نسبت مثلثاتی عدد داشتیم، ابتدا باید به جای آن، نسبت مثلثاتیِ زاویه‌ای که این عدد را می‌دهد بنویسیم؛ سپس با قواعد زیر جواب‌های کلی معادله را به‌دست آوریم:

۱) معادلهٔ مثلثاتی سینوسی:

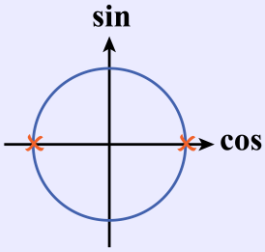


$$\sin x=a \xrightarrow{-1\le a\le 1} \sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

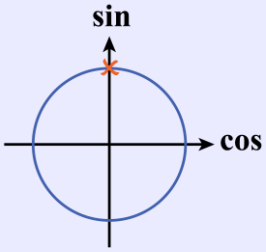
$$\sin x=\sin y \longrightarrow \begin{cases} x=2k\pi+y \\ x=2k\pi+\pi-y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

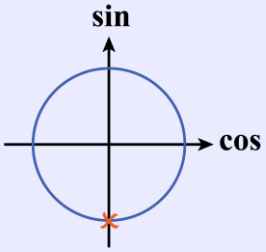
۱) $\sin A=0 \Rightarrow A=k\pi$



۲) $\sin A=1 \Rightarrow A=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

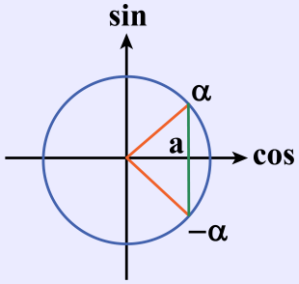


۳) $\sin A=-1 \Rightarrow A=2k\pi-\frac{\pi}{2}$



سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲) معادلهٔ مثلثاتی کسینوسی:

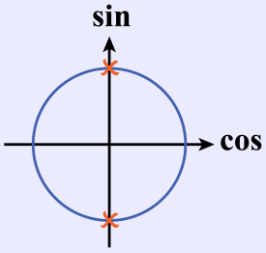


$$\cos x = a \xrightarrow{-1\le a\le 1} \cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

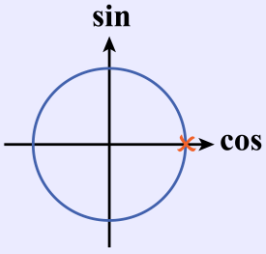
$$\cos x = \cos y \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

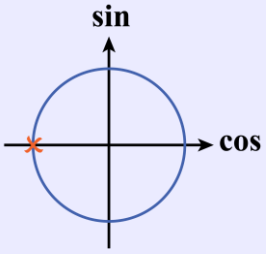
۱) $\cos A = 0 \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{2}$



۲) $\cos A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi$



۳) $\cos A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi + \pi$



نمونه‌های باحال ببین!

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

۱) $\sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$

$$\sin x(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

۲) $\sin 4x = \sin x$

$$\sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

۳) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴) $\cos 2x = \cos x$

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{2k\pi}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

توجه!

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی دو نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. یعنی اگر نسبت‌ها یکسان نبودند باید با استفاده از روابط زوایای متمم نسبت‌ها را یکی کنیم و سپس اگر علامت منفی پشت یک نسبت بود، آن را با استفاده از روابط زوایای قرینه یا مکمل از بین ببریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = -\cos x$ را به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

$$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در بازه‌ای خاص

برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌طوری که جواب‌های به‌دست آمده در بازهٔ $[\alpha, \beta]$ باشند، کافی است در مجموعه جواب معادلهٔ مثلثاتی به جای k، اعداد صحیح مناسب را قرار دهیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

معادلهٔ مثلثاتی $2\sin 3x + 1 = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

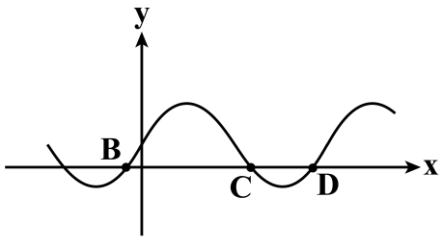
پاسخ تشریحی:

$$2\sin 3x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

k	۰		۱		۲	
x	$-\frac{\pi}{۱۸}$ ×	$\frac{۷\pi}{۱۸}$ ✓	$\frac{۱۱\pi}{۱۸}$ ✓	$\frac{۱۹\pi}{۱۸}$ ×	$\frac{۲۳\pi}{۱۸}$ ×	$\frac{۳۱\pi}{۱۸}$ ×

پس معادلهٔ فوق در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارای ۲ جواب است.

۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۱+۲\sin\frac{x}{۲}$ به شکل مقابل است. در این صورت نسبت طول پاره‌خط BC به طول پاره‌خط CD کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

برای محاسبهٔ طول نقاط B، C و D باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم و دو جواب مثبت کوچک‌تر در بین جواب‌های مثبت و همچنین اولین جواب منفی قبل از $x=۰$ را بیابیم.

$$۱+۲\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\sin\frac{x}{۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin\frac{x}{۲}=\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ \frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۴k\pi-\frac{\pi}{۳}\\ x=۴k\pi+\frac{۷\pi}{۳}\end{cases}$$

k	۰	۱
x	$-\frac{\pi}{۳},\frac{۷\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۳}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_B=-\frac{\pi}{۳}\\ x_C=\frac{۷\pi}{۳}\\ x_D=\frac{۱۱\pi}{۳}\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم طول پاره‌خط‌ها را حساب کنیم:

$$BC=\frac{۷\pi}{۳}-(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۸\pi}{۳}\ ,\ CD=\frac{۱۱\pi}{۳}-\frac{۷\pi}{۳}=\frac{۴\pi}{۳}$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{\frac{۸\pi}{۳}}{\frac{۴\pi}{۳}}=۲$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴- بیش‌ترین مقدار عبارت $P=\frac{۲-۲\tan^۲ ۲x}{۱+\tan^۲ ۲x}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا ضابطهٔ P را ساده می‌کنیم:

$$P=\frac{۲(۱-\tan^۲ ۲x)}{۱+\tan^۲ ۲x}=۲\cos ۴x$$

(زیرا طبق فرمول‌های مثلثاتی همواره وقتی $\cos\alpha\neq ۰$ باشد، رابطهٔ $\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos ۲\alpha$ برقرار است.)

پس بیش‌ترین مقدار P برابر ۲ است.

رفع ابهام!

فرمول مثلثاتی $\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos ۲\alpha$ از کجا اومد؟ از این‌جا:

$$\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱-\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}{۱+\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}=\frac{\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}{\frac{\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}}=\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{۱}=\cos ۲\alpha$$

۵- اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)=۳$ و $\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})=۷$ باشد، آن‌گاه حاصل $\tan(\frac{\alpha-\beta}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا با دقت به زوایای $\alpha+\frac{\beta}{۲}$، $\frac{\alpha}{۲}+\beta$ و $\frac{\alpha-\beta}{۲}$ می‌یابیم که تفاضل $\frac{\alpha-\beta}{۲}$ است؛ یعنی:

$$\frac{\alpha-\beta}{۲}=(\alpha+\frac{\beta}{۲})-(\frac{\alpha}{۲}+\beta)$$

پس بنابر رابطهٔ تانژانت تفاضل دو زاویه داریم:

$$\tan(\underbrace{(\alpha+\frac{\beta}{۲})-(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}_{\frac{\alpha}{۲}-\frac{\beta}{۲}})=\frac{\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})-\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}{۱+\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})\tan(\frac{\alpha}{۲}+\beta)}=\frac{۷-۳}{۱+۲۱}=\frac{۴}{۲۲}=\frac{۲}{۱۱}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{۱}{\tan(\alpha\pm\beta)}$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۶- اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$ کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\tan ۳x\cdot\tan nx=۱$ باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم که برای حل معادلهٔ مثلثاتی تانژانتی باید دو طرف تساوی تانژانت داشته باشیم. پس:

$$\tan nx=\frac{۱}{\tan ۳x}=\cot ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-۳x)$$

$$\Rightarrow nx=\frac{\pi}{۲}-۳x+k\pi$$

$$\Rightarrow (n+۳)x=\frac{\pi}{۲}+k\pi$$

می‌دانیم که به‌ازای $k=۰$ کوچک‌ترین جواب مثبت معادله به‌دست می‌آید. در نتیجه:

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲n+۶}$$

و از آن‌جا که در سؤال گفته شده کوچک‌ترین جواب مثبت معادله برابر با $\frac{\pi}{۲۴}$ است، پس:

$$\frac{\pi}{۲n+۶}=\frac{\pi}{۲۴}\Rightarrow n=۹$$

۷- معادلهٔ $\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۶x=۱$ در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ چند جواب دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا معادله را به معادله‌ای تبدیل می‌کنیم که تنها یک نوع نسبت مثلثاتی در آن وجود داشته باشد:

$$\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۶x=۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x=۱-\cos^۲ ۶x$$

$$\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\sin^۲ ۶x$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\cos ۴x}{۲}=\frac{۱-\cos ۱۲x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱-\cos ۴x=۱-\cos ۱۲x$$

$$\Rightarrow \cos ۴x=\cos ۱۲x$$

$$\Rightarrow ۱۲x=۲k\pi\pm ۴x$$

$$\begin{cases} ۱۲x=۲k\pi+۴x\Rightarrow ۸x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴} \\ ۱۲x=۲k\pi-۴x\Rightarrow ۱۶x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۸} \end{cases}\xrightarrow{\cup} x=\frac{k\pi}{۸}$$

به‌ازای مقادیر $k=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ جواب‌های $x=۰$، $x=\frac{\pi}{۸}$، $x=\frac{\pi}{۴}$، $x=\frac{۳\pi}{۸}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ در بازهٔ موردنظر قرار دارند که تعداد آن‌ها برابر ۵ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه

اگر در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه، هر دو زاویه را α در نظر بگیریم، داریم:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin 2\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{به‌طور کلی}} \cos 2\bigcirc = \begin{cases} \cos^2\bigcirc - \sin^2\bigcirc \\ 1 - 2\sin^2\bigcirc \\ 2\cos^2\bigcirc - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\bigcirc = \frac{2\tan\bigcirc}{1-\tan^2\bigcirc}$$

جرقهٔ ذهنی!

بسیاری از اوقات برای از بین بردن توان ۲ برای سینوس یا کسینوس در معادلات مثلثاتی، از روابط بالا به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

ماز

۸- میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۴ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا معادله را به معادله‌ای تبدیل می‌کنیم که تنها یک نوع نسبت مثلثاتی در آن وجود داشته باشد:

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{-1\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2} & \text{جواب ندارد.} \\ \sin x = \frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

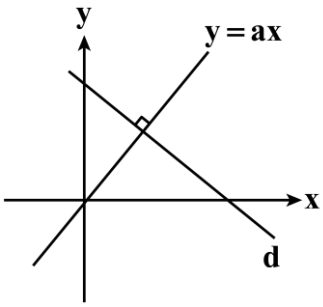
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=1} x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

کوچک‌ترین جواب معادله در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, ۳\pi\right]$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ و بزرگ‌ترین جواب آن برابر $\frac{۱۷\pi}{۶}$ است که میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{۱۷\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}$$

۹- در شکل مقابل، خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد. به‌ازای کدام مقدار a، رابطهٔ $\cos ۲\alpha = ۰/۹$ برقرار است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۹}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

چون خط d با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد، پس شیب خط d برابر $\tan\alpha$ است. از طرفی داریم:

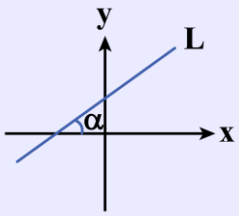
$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۹}{۱۰}=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow ۹+۹\tan^۲\alpha=۱۰-۱۰\tan^۲\alpha \Rightarrow ۱۹\tan^۲\alpha=۱ \Rightarrow \tan^۲\alpha=\frac{۱}{۱۹}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } \alpha \text{ منفرجه است، پس باید } \tan\alpha \text{ منفی باشد.}} \tan\alpha=\frac{-۱}{\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \text{شیب خط d}: m=-\frac{۱}{\sqrt{۱۹}}$$

$$\xrightarrow{\text{چون خطوط بر هم عمودند.}} a.\left(\frac{-۱}{\sqrt{۱۹}}\right)=-۱ \Rightarrow a=\sqrt{۱۹}$$

شیب خط و تانژانت

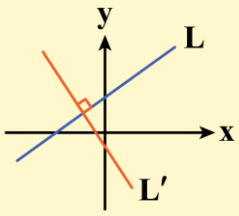
شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.



$$m_L=\tan\alpha$$

شیب خطوط عمود برهم

اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان -۱ می‌باشد:



$$L\perp L' \Leftrightarrow m_L\times m_{L'}=-۱$$

روابط مثلثاتی زوایای دو برابر کمان برحسب تانژانت

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر یک زاویه را می‌توان برحسب tan آن زاویه نوشت:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} \qquad \cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \qquad \cot ۲\alpha=\frac{۱}{\tan ۲\alpha}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰- معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۴x}{۱+\cos ۴x}=\tan(x-\frac{\pi}{۸})$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

طبق فرمول مثلثاتی $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sin ۴x}{۱+\cos ۴x}=\tan ۲x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\tan ۲x=\tan(x-\frac{\pi}{۸})\Rightarrow ۲x=k\pi+x-\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸}$$

تنها جواب معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌ازای $k=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با $x=\frac{۷\pi}{۸}$.

پس معادله در بازهٔ مطلوب فقط یک جواب دارد.

تذکر!

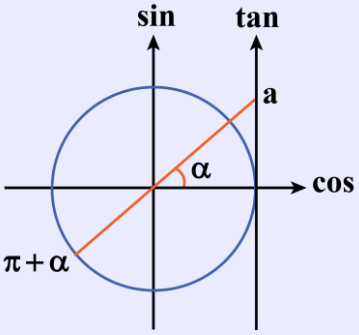
دقت کنید $x=\frac{۷\pi}{۸}$ نباید مخرج سمت چپ تساوی در معادله را صفر کند و همین‌طور به‌ازای $x=\frac{۷\pi}{۸}$ عبارت سمت راست معادله باید تعریف شده باشد که هر دو شرط برقرار است.

رفع ابهام!

بیاید بریم ببینیم فرمول $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲}$ از کجا اومد؟

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+\left(۲\cos^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)-۱\right)}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$

معادلهٔ مثلثاتی تانژانت



$$\tan x=a\Rightarrow \tan x=\tan\alpha\xrightarrow{a\in\mathbb{R}}x=k\pi+\alpha$$
$$\tan x=\tan y\Rightarrow x=k\pi+y$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\tan x=-۱\Rightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$$

$$\tan ۴x=\tan x\Rightarrow ۴x=k\pi+x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

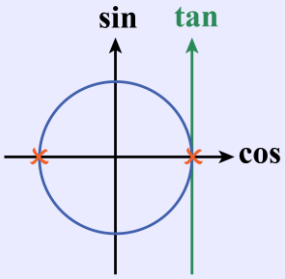
تذکر!

بعد از حل معادلهٔ مثلثاتی تانژانت، حتماً درستی جواب‌ها را چک کنید. زیرا برخی از جواب‌ها ممکن است تانژانت را به عبارت تعریف نشده تبدیل کنند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

معادلهٔ $\tan ۳x = \tan x$ را حل کنید. (بر عهدهٔ شما 😉)

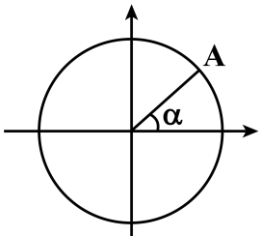
حالت خاص:



$$\tan A = ۰ \Rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = ۰ \Rightarrow \sin A = ۰ \Rightarrow A = k\pi$$

ماز

۱۱- اگر $A(۲\tan\alpha, b)$ مطابق شکل روی دایرهٔ مثلثاتی واقع شده باشد، b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$
۲) $\sqrt{۲}-۱$
۳) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $-۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۰۰۲)

می‌دانیم هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی که در انتهای کمان α واقع شده باشد با مختصات $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ خواهد بود، پس:

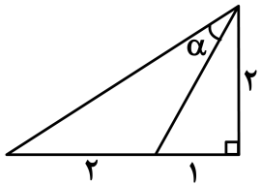
$$۲\tan\alpha = \cos\alpha \Rightarrow ۲\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۲\sin\alpha$$

$$۱-\sin^۲\alpha = ۲\sin\alpha \Rightarrow \sin^۲\alpha + ۲\sin\alpha - ۱ = ۰$$

$$(\sin\alpha+۱)^۲ = ۲ \begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{۲}-۱ \Rightarrow b = \sqrt{۲}-۱ \\ \sin\alpha = -\sqrt{۲}-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ماز

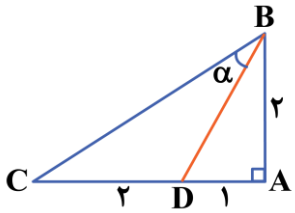
۱۲- در شکل مقابل، مقدار $\tan\alpha$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۳}{\sqrt{۶۵}}$
۲) $\frac{۴}{\sqrt{۶۵}}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۲)

در شکل مقابل، برای مثلث BCD داریم:



$$S_{\triangle BCD} = \frac{۱}{۲}CD \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

از طرفی:

$$\triangle ABD : DB^۲ = DA^۲ + AB^۲ \Rightarrow DB = \sqrt{۵}$$

$$\triangle ABC : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۳}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

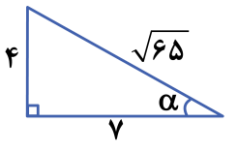
پس:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \times BD \times \sin\alpha \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{5} \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

برای محاسبهٔ تانژانت دو روش داریم:

روش اول

اگر مثلثی فرضی در نظر بگیریم به طوری‌که $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$ آن‌گاه:



$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{7}$$

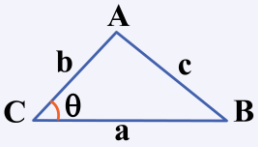
روش دوم

با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ داریم:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{16}{65}} = \frac{1}{\frac{49}{65}} = \frac{65}{49} \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{16}{49} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{7}$$

یادآوری محاسبهٔ مساحت مثلث

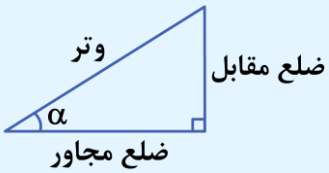
برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها داریم:



$$S = \frac{1}{2} ab\sin(\theta)$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

وقتی که فقط یکی از نسبت‌های مثلثاتی را داریم، برای محاسبهٔ اندازهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها، یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرد و نسبت معلوم را روی دو ضلع آن نوشت. سپس با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس طول ضلع دیگر را به‌دست آورد و تمام نسبت‌ها را این گونه مشخص کرد.



$$\sin\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}$$

توجه!

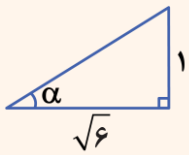
توجه داشته باشید که با روش رسم مثلث فقط اندازهٔ نسبت به‌دست می‌آید و برای تعیین علامت نسبت باید به این‌که انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد توجه کرد.

یه نمونهٔ باحال ببین!

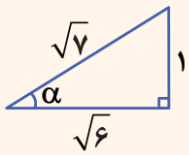
اگر $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویهٔ α به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و ضلع مقابل را برابر ۱ و ضلع مجاور را برابر $\sqrt{۶}$ قرار می‌دهیم.



سپس با استفاده از فیثاغورس اندازهٔ وتر را به‌دست می‌آوریم:



$$\text{وتر} = \sqrt{\left(\sqrt{۶}\right)^{۲} + ۱^{۲}} = \sqrt{۷}$$

حال می‌توانیم سه نسبت مثلثاتی دیگر را به راحتی به‌دست آوریم، توجه داریم که در ناحیهٔ دوم تنها سینوس مثبت است.

$$\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۷}} \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۷}} \qquad \cot\alpha = -\sqrt{۶}$$

۱۳- حاصل عبارت $A = \frac{\sin ۴۴^\circ \cos ۲۲^\circ}{(۱+\cos ۴۴^\circ)(۱-\cos ۲۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) $۲\cot ۱۱^\circ$ ۲) $۲\tan ۱۱^\circ$ ۳) $\cot ۱۱^\circ$ ۴) $\tan ۱۱^\circ$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

از فرمول‌های مثلثاتی $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $۱-\cos\alpha = ۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ و $۱+\cos\alpha = ۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\sin ۴۴^\circ \cos ۲۲^\circ}{(۱+\cos ۴۴^\circ)(۱-\cos ۲۲^\circ)} = \frac{۲\sin ۲۲^\circ \cos ۲۲^\circ \cos ۲۲^\circ}{۲\cos^{۲} ۲۲^\circ \times ۲\sin^{۲} ۱۱^\circ}$$

$$A = \frac{\sin ۲۲^\circ}{۲\sin^{۲} ۱۱^\circ} = \frac{۲\sin ۱۱^\circ \cos ۱۱^\circ}{۲\sin^{۲} ۱۱^\circ} = \frac{\cos ۱۱^\circ}{\sin ۱۱^\circ} = \cot ۱۱^\circ$$

۱۴- اگر $\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲}$ جواب معادلهٔ $۳x^{۲} - ۳x + m = ۰$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۲ ـ ۱۱۰۴)

جمع جواب‌های معادلهٔ $۳x^{۲} - ۳x + m = ۰$ برابر $S = -\frac{b}{a} = ۱$ است، پس ریشهٔ دیگر $۱ - \cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲} = \sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}$ است.

برای ضرب ریشه‌ها داریم:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{۳} = \sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۲}$$

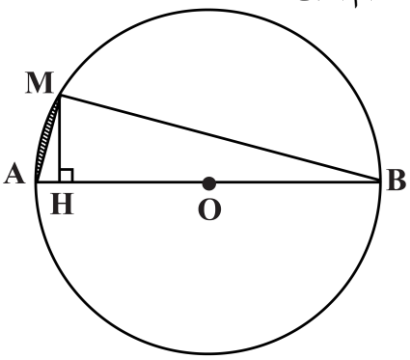
حال با استفاده از فرمول $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ داریم:

$$\Rightarrow m = \frac{۳}{۴}\left(۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow m = \frac{۳}{۴}\sin^{۲}\frac{\pi}{۶} \Rightarrow m = \frac{۳}{۴} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۳}{۱۶}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

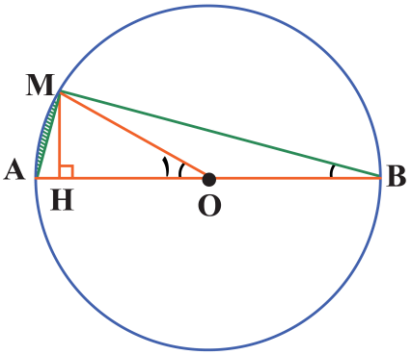
۱۵- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل O مرکز دایره و $MH=\frac{۱}{۲}$ است. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده کدام است؟



۱) $\frac{\pi-۲}{۶}$
۲) $\frac{\pi-۳}{۱۲}$
۳) $\frac{\pi-۴}{۱۲}$
۴) $\frac{۲\pi-۳}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹۴ ـ ۱۱۰۴)

از O به M وصل می‌کنیم. می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است و برعکس؛ پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\hat{MOH}$ داریم:

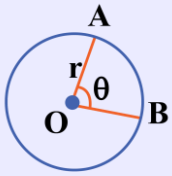


$$\begin{cases} MH=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{O}_۱=۳۰^\circ \\ OM=۱ \end{cases}$$

$$S=\text{مساحت قطاع OAM} - \text{مساحت مثلث OAM}=\frac{۱}{۲}r^۲\theta-\frac{۱}{۲}r^۲\sin\theta=\frac{\pi}{۱۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{\pi-۳}{۱۲}$$

طول کمان و مساحت قطاع دایره

با توجه به شکل مقابل اگر θ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AB باشد داریم:



طول کمان: $\overset{\frown}{AB}=r\theta$

مساحت قطاع: $S=\frac{۱}{۲}\theta r^۲$

۱۶- با فرض $\sin ۴۲^\circ=۰/۶$، حاصل عبارت $A=\frac{\sin ۴۸^\circ+\tan ۴۲^\circ\sin ۱۳۸^\circ}{\cos ۴۹۸^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$
۲) $-\frac{۵}{۸}$
۳) $-\frac{۲۵}{۱۶}$
۴) $\frac{۲۵}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۰۰ ـ ۱۱۰۴)

اولاً می‌دانیم که:

$$\sin ۴۸^\circ=\sin(۹۰^\circ-۴۲^\circ)=\cos ۴۲^\circ$$

$$\sin ۱۳۸^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۴۲^\circ)=\sin ۴۲^\circ$$

$$\cos ۴۹۸^\circ=\cos(۳۶۰^\circ+۱۳۸^\circ)=\cos(۱۳۸^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۴۲^\circ)=-\cos ۴۲^\circ$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

حال با جای‌گذاری در A داریم:

$$A=\frac{\sin ۴۸^\circ+\tan ۴۲^\circ \sin ۱۳۸^\circ}{\cos ۴۹۸^\circ}=\frac{\cos ۴۲^\circ+\frac{\sin ۴۲^\circ}{\cos ۴۲^\circ}\sin ۴۲^\circ}{-\cos ۴۲^\circ}$$

$$A=\frac{\cos^۲ ۴۲^\circ+\sin^۲ ۴۲^\circ}{-\cos^۲ ۴۲^\circ}=\frac{-۱}{\cos^۲ ۴۲^\circ}=\frac{-۱}{۱-\sin^۲ ۴۲^\circ}$$

$$=\frac{-۱}{۱-(۰/۶)^۲}=\frac{-۱}{۱-۰/۳۶}=\frac{-۱}{۰/۶۴}=\frac{-۱۰۰}{۶۴}=\frac{-۲۵}{۱۶}$$

دانستنی‌های مثلثات

مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}$ نسبت‌های مثلثاتی را به‌صورت مقابل عوض می‌کنند:

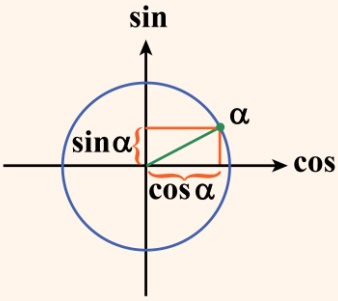
sin ⟷ cos tan ⟷ cot

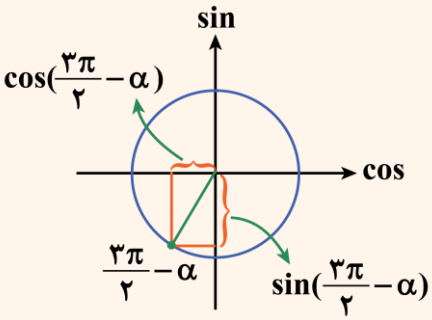
علامت نسبت مثلثاتی با توجه به ناحیهٔ قرارگیری زاویه تعیین می‌شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$ را برحسب زاویهٔ α بنویسید.

پاسخ تشریحی:





$$\tan(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}}^{\text{ناحیه ۳}}-\alpha)=+\cot\alpha$$ تانژانت در این ناحیه مثبت است.

$$\sin(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}}^{\text{ناحیه ۳}}-\alpha)=-\cos\alpha$$ سینوس در این ناحیه منفی است.

$$\cot(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}}^{\text{ناحیه ۳}}-\alpha)=+\tan\alpha$$ کتانژانت در این ناحیه مثبت است.

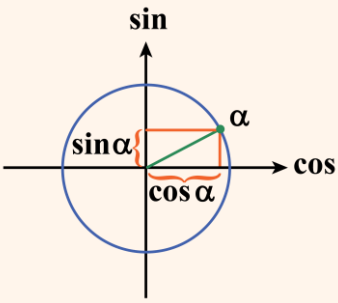
$$\cos(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}}^{\text{ناحیه ۳}}-\alpha)=-\sin\alpha$$ کسینوس در این ناحیه منفی است.

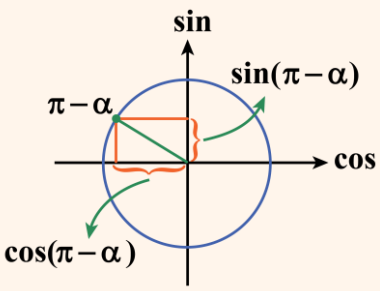
مضارب صحیح π یعنی $k\pi$ نسبت‌های مثلثاتی را عوض نمی‌کنند؛ یعنی sin همان sin، cos همان cos و... می‌شود.

علامت نسبت مثلثاتی با توجه به ناحیهٔ قرارگیری زاویه تعیین می‌شود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\pi-\alpha$ را برحسب زاویهٔ α بنویسید.





سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$\sin(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیه ۲}}) = +\sin\alpha$ ← سینوس در این ناحیه مثبت است.

$\tan(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیه ۲}}) = -\tan\alpha$ ← تانژانت در این ناحیه منفی است.

$\cos(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیه ۲}}) = -\cos\alpha$ ← کسینوس در این ناحیه منفی است.

$\cot(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ناحیه ۲}}) = -\cot\alpha$ ← کتانژانت در این ناحیه منفی است.

کم کردن دایره‌های کامل از زاویه

برای محاسبهٔ sin یا cos زوایای بزرگ، اندازهٔ زاویه را اگر برحسب درجه باشد، بر ۳۶۰° تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم و اگر زاویه برحسب رادیان باشد، مضارب زوج π یعنی همان $(۲k\pi)$ را حذف می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن نشان دهید.

۱) $\sin ۸۱۰^\circ = ?$

$۸۱۰ \;|\; ۳۶۰$
$۷۲۰ \;\; ۲$
۹۰

$\Rightarrow \quad \sin ۸۱۰^\circ = \sin ۹۰^\circ = ۱$

۲) $\cos\frac{۲۷\pi}{۴} = ?$

$\frac{۲۷}{۴} = ۶ + \frac{۳}{۴} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{۲۷\pi}{۴} = \cos(۶\pi + \frac{۳\pi}{۴}) = \cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\sin(\frac{۱۹\pi}{۲} + x) = ?$

$\frac{۱۹}{۲} = ۹ + \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \sin(\frac{۱۹\pi}{۲} + x) = \sin(۹\pi + \frac{\pi}{۲} + x) = \sin(۸\pi + \frac{۳\pi}{۲} + x) = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) = -\cos x$

کم کردن نیم‌دایره‌ها از زاویه

برای محاسبهٔ tan یا cot زوایای بزرگ، اندازهٔ زاویه را اگر برحسب درجه باشد بر ۱۸۰° تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را در نظر می‌گیریم و اگر زاویه برحسب رادیان باشد، مضارب صحیح π یعنی همان $(k\pi)$ را حذف می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن نشان دهید.

۱) $\tan ۵۱۰^\circ = ?$

$۵۱۰ \;|\; ۱۸۰$
$۳۶۰ \;\; ۲$
۱۵۰

$\Rightarrow \quad \tan ۵۱۰^\circ = \tan ۱۵۰^\circ = -\tan ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\cot(\frac{۲۰\pi}{۳}) = ?$

$\frac{۲۰}{۳} = ۶ + \frac{۲}{۳} \quad \Rightarrow \quad \cot(\frac{۲۰\pi}{۳}) = \cot(۶\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \cot\frac{۲\pi}{۳} = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\tan(\frac{۹\pi}{۲} + x) = ?$

$\frac{۹}{۲} = ۴ + \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \tan(\frac{۹\pi}{۲} + x) = \tan(۴\pi + \frac{\pi}{۲} + x) = \tan(\frac{\pi}{۲} + x) = -\cot x$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۷- اگر $2\alpha-\beta=\frac{3\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A=2\cos(4\alpha-\beta)-\cos(3\beta-2\alpha)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $4\sin^2\alpha\sin 2\alpha$
۲) $2\sin^2\alpha\sin 2\alpha$
۳) $4\cos^2\alpha\sin 2\alpha$
۴) $2\cos^2\alpha\sin 2\alpha$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۱۱ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا سعی می‌کنیم در کمان‌های مقابل cos در عبارت A مقدار داده شده را جدا کنیم:

$$A=2\cos(4\alpha-\beta)-\cos(3\beta-2\alpha)$$
$$=2\cos(2\alpha+\underbrace{2\alpha-\beta}_{\frac{3\pi}{2}})-\cos(2\beta+\underbrace{\beta-2\alpha}_{-\frac{3\pi}{2}})$$
$$=2\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})-\cos(2\beta-\frac{3\pi}{2})$$

از این‌که $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$ است، داریم:

$$=2\sin 2\alpha-\cos(\frac{3\pi}{2}-2\beta)=2\sin 2\alpha+\sin 2\beta$$
$$=2\sin 2\alpha+\sin 2(2\alpha-\frac{3\pi}{2})=2\sin 2\alpha+\sin(4\alpha-3\pi)$$
$$=2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$=2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)=2\sin 2\alpha(2\sin^2\alpha)=4\sin^2\alpha\sin 2\alpha$$

۱۸- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم و تساوی $16\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-9=0$ برقرار باشد، حاصل $\cot(\frac{13\pi}{2}+2\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{63}$
۲) $-\frac{16}{32}$
۳) $\frac{63}{16}$
۴) $-\frac{63}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۰۳ ـ ۱۱۰۴)

$$16\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-9=0$$
$$\xrightarrow{\text{طرفین را بر } \sin^2\alpha \text{ تقسیم می‌کنیم.}} 16\cot^2\alpha-2\cot\alpha-\frac{9}{\sin^2\alpha}=0$$
$$16\cot^2\alpha-2\cot\alpha-9(1+\cot^2\alpha)=0\Rightarrow 7\cot^2\alpha-2\cot\alpha-9=0$$
$$\xrightarrow{a+c=b}\cot\alpha=-1\,,\cot\alpha=\frac{9}{7}$$

چون α در ناحیهٔ سوم است، پس باید $\cot\alpha>0$ باشد و بنابراین $\cot\alpha=\frac{9}{7}$ قابل قبول است، بنابراین:

$$\cot(\frac{13\pi}{2}+2\alpha)=\cot(6\pi+\frac{\pi}{2}+2\alpha)=\cot(\frac{\pi}{2}+2\alpha)=-\tan 2\alpha=\frac{-2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-2(\frac{7}{9})}{1-\frac{49}{81}}=\frac{-\frac{14}{9}}{\frac{32}{81}}=\frac{-63}{16}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یادآوری از معادلات درجهٔ دوم!

در معادلهٔ درجهٔ دوم به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ می‌توان گفت:

$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$a+b+c=۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{c}{a} \end{cases}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$۲x^۲-۱۰x+۸=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=\frac{۸}{۲}=۴ \end{cases}$$

$$۳x^۲+۷x+۴=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

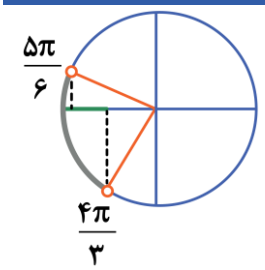
ماز

۱۹- اگر $\frac{۴\pi}{۹}<x<\frac{۵\pi}{۱۸}$ و $\cos ۳x=\frac{۱}{۴m+۱۱}$ باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹۴ ـ ۱۱۰۴)

توجه شود که واحد زاویه به‌صورت پیش‌فرض، واحد رادیان است، بنابراین داریم:



$$\frac{۵\pi}{۱۸}<x<\frac{۴\pi}{۹} \Rightarrow \frac{۵\pi}{۶}<۳x<\frac{۴\pi}{۳}$$

حال محدودهٔ تغییرات کمان را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم و سپس تصویر آن را روی محور کسینوس‌ها به‌دست می‌آوریم تا محدودهٔ تغییرات $\cos ۳x$ مشخص شود، طبق شکل داریم:

$$-۱\le \cos ۳x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۱\le \frac{۱}{۴m+۱۱}<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲<۴m+۱۱\le -۱ \Rightarrow -۱۳<۴m\le -۱۲ \Rightarrow -\frac{۱۳}{۴}<m\le -۳$$

بنابراین محدودهٔ تغییرات m شامل فقط یک مقدار صحیح است.

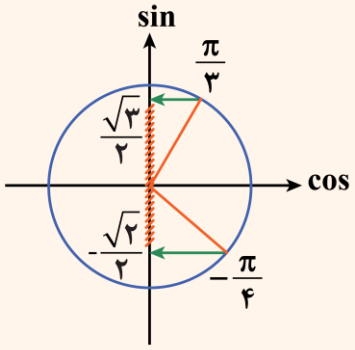
محاسبهٔ محدودهٔ نسبت مثلثاتی با داشتن محدودهٔ زاویه

برای محاسبهٔ حدود sin یا cos برای یک محدودهٔ مشخص زوایا، کافی است آن محدودهٔ زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کرده وسپس تصویر کمان را روی محور sin یا cos سایه بزنیم.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال ببین!

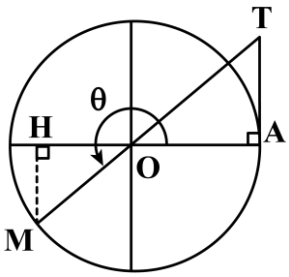
اگر $-\frac{\pi}{۴} \le x < \frac{\pi}{۳}$ باشد، حدود عبارت $A = \sin x$ چقدر است؟



$$-\frac{\pi}{۴} \le x < \frac{\pi}{۳} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \sin x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ماز

۲۰- شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی است. اگر طول OH برابر $\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$ باشد، طول پاره‌خط AT کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۰۰۲)

روش اول

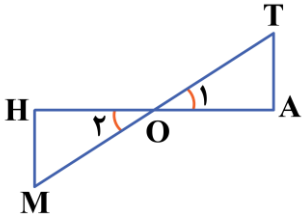
با دقت در شکل، مشخص است که OH همان $\cos\theta$ است، یعنی با توجه به این‌که طول OH برابر $\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $\cos\theta = \frac{-۴}{\sqrt{۱۷}}$ (زیرا $\cos\theta$ در ناحیهٔ سوم منفی است) همچنین دقت شود که اندازهٔ AT همان $\tan\theta$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow ۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۱۷}}$$

$$\Rightarrow \tan^۲\theta = \frac{۱۷}{۱۶} - ۱ \Rightarrow \tan^۲\theta = \frac{۱}{۱۶} \xrightarrow{\tan\theta > ۰} \tan\theta = \frac{۱}{۴}$$

(توجه شود که $\tan\theta$ در ناحیهٔ سوم مثبت است.)

روش دوم



از آن‌جایی که $OM = ۱$ است، بنابراین:

$$\overset{\triangle}{OHM}: OH^۲ + HM^۲ = OM^۲ \Rightarrow (\frac{۴}{\sqrt{۱۷}})^۲ + HM^۲ = ۱ \Rightarrow HM^۲ = ۱ - \frac{۱۶}{۱۷} \Rightarrow HM^۲ = \frac{۱}{۱۷} \Rightarrow HM = \frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$$

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \tan\hat{O}_۱ = \tan\hat{O}_۲ \Rightarrow \frac{HM}{OH} = \frac{AT}{OA} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}} = \frac{AT}{۱} \Rightarrow AT = \frac{۱}{۴}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

روش سوم

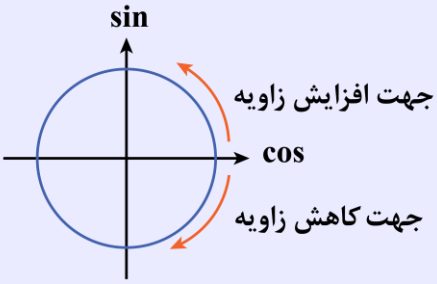
از تشابه دو مثلث $\overset{\triangle}{OAT}$ و $\overset{\triangle}{OHM}$ داریم:

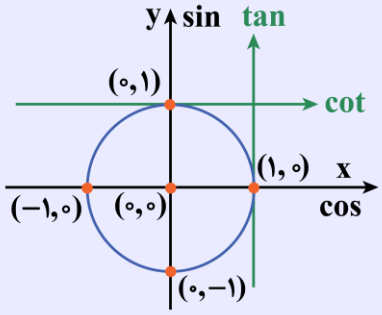
$$OH=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}\ ,\ OM=۱ \Rightarrow HM=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}$$

$$\overset{\triangle}{OHM}\sim\overset{\triangle}{OAT} \Rightarrow \frac{AT}{HM}=\frac{OA}{OH} \Rightarrow \frac{AT}{\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}=\frac{۱}{\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}} \Rightarrow AT=\frac{۱}{۴}$$

دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ که بر روی آن چهار محور sin، cos ، tan و cot به‌صورت زیر رسم می‌شوند.



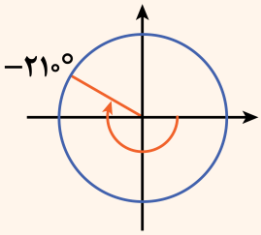


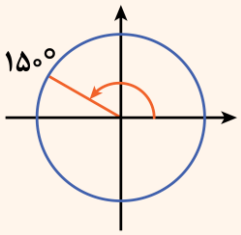
تذکر

محور cot در کتاب درسی ذکر نشده است و صرفاً جهت اطلاع برای افراد علاقه‌مند آورده شده است.

یه نمونهٔ باحال ببین!

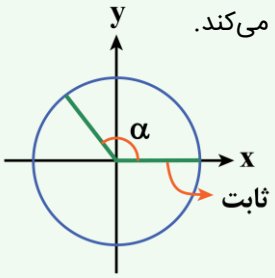
زوایای ۱۵۰° و -۲۱۰° را در دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.



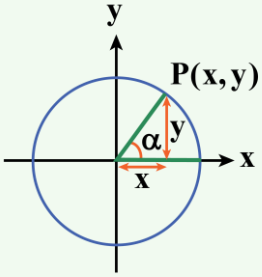


نکات دایرهٔ مثلثاتی

در دایرهٔ مثلثاتی یک ضلع زاویه همواره منطبق بر محور xها (cosها) است و ضلع دیگر برای تغییر زاویه دوران می‌کند.



در دایرهٔ مثلثاتی، اگر ضلع زاویه دایره را در نقطهٔ $P(x,y)$ قطع کند، طول نقطه همان cos و عرض نقطه همان sin زاویه را نشان می‌دهد.



$$\sin\alpha=\frac{y}{۱}=y \qquad \tan\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{۱}=x \qquad \cot\alpha=\frac{x}{y}$$

$$P(\underset{\cos\alpha}{x}\ ,\ \overset{\sin\alpha}{y})$$

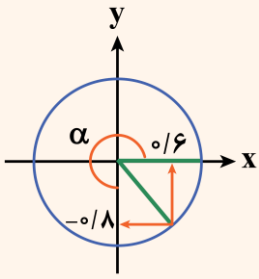
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر ضلع زاویهٔ α، دایرهٔ مثلثاتی را در $P(۰/۶, -۰/۸)$ قطع کند، انتهای کمان زاویهٔ α در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

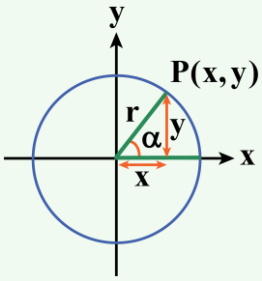
انتهای کمان زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی است.



$$\cos\alpha = x_P = ۰/۶ \qquad \tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\sin\alpha = y_P = -۰/۸ \qquad \cot\alpha = \frac{x_P}{y_P} = -\frac{۳}{۴}$$

اگر O مرکز دایرهٔ موردنظر و شعاع آن مخالف ۱ باشد و ضلع زاویه، دایره را در نقطهٔ $P(x,y)$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه از روابط زیر محاسبه می‌شود.



$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر ضلع زاویهٔ α دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات را در نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

پاسخ تشریحی:

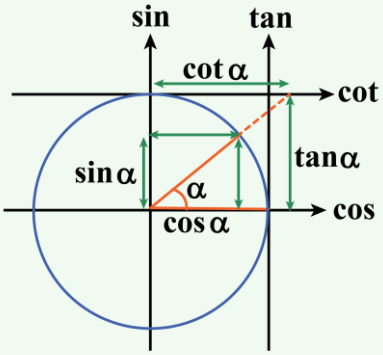
شعاع دایره برابر است با:

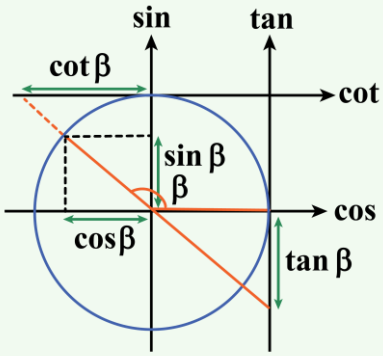
$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(-۳)^۲ + (-۴)^۲} = ۵$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{۴}{۵} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{۴}{۳}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{۳}{۵} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{۳}{۴}$$

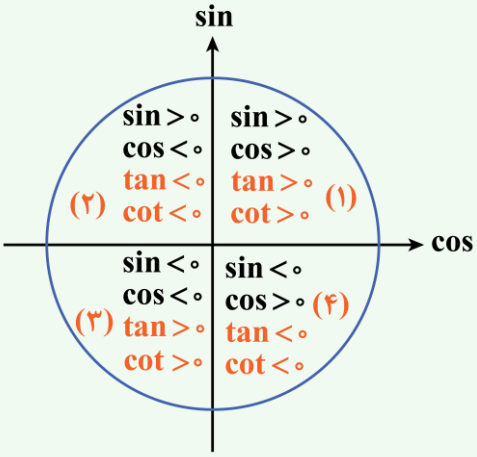
برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی به‌طور تقریبی کافی است از انتهای ضلع زاویه بر محور sin و cos عمود کنیم و به مبدأ وصل کنیم و برای به‌دست آوردن tan و cot زاویه کافی است ضلع زاویه را از بالا یا پایین ادامه دهیم تا محور tan و cot را قطع کرده و سپس به مبدأ مربوطه وصل می‌کنیم.





www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دایرهٔ مثلثاتی دارای ۴ ناحیه به‌صورت زیر می‌باشد:



راهنمای زرنگ‌بازی!

برای این‌که علامت نسبت‌های مثلثاتی رو توی هر ناحیه یادت باشه رمز پایین رو به خاطر بسپار! 😉

هستک ۱ ۲ ۳ ۴

۱. ناحیهٔ اول: همه مثبت
۲. ناحیهٔ دوم: فقط سینوس مثبت
۳. ناحیهٔ سوم: فقط تانژانت و کتانژانت مثبت
۴. ناحیهٔ چهارم: فقط کسینوس مثبت

با این رمز تو هر ناحیه نسبت‌هایی که علامت مثبت دارن رو سریع پیدا می‌کنی و می‌دونی که مابقی نسبت‌ها توی اون ناحیه منفی هستن.

۲۱- اگر $(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $|A^3|=216$
ب) $|A^{-1}|=\frac{1}{6}$
ج) $|A+I|=-4$
د) $|A^2-2I|=14$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون}} A-I=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}+I \Rightarrow A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

بررسی موارد:

الف

$$|A|=-6 \Rightarrow |A^3|=|A|^3=-216$$

پس مورد «الف» نادرست است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ب

$$|A|=-۶ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=-\frac{۱}{۶}$$

پس مورد «ب» نادرست است.

ج

$$A+I=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I|=-۴ \checkmark$$

پس مورد «ج» درست است.

د

$$A^۲-۲I=\begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A^۲-۲I|=۱۴ \checkmark$$

پس مورد «د» درست است.

در مجموع ۲ مورد درست هستند.

وارونِ وارونِ یه ماتریس می‌شه خود ماتریس!

اگر $A^{-۱}$ را داشته باشیم برای به‌دست آوردن A از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$(A^{-۱})^{-۱}=A$$

چند قانون مهم در دترمینان ماتریس‌ها

۱) $|A^n|=|A|^n$ ۲) $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$ ۳) $|(A^{-۱})^n|=\frac{۱}{|A|^n}$

تذکر!

دقت کنید که $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$ یعنی دترمینان جمع و تفریق دو ماتریس برابر با جمع یا تفریق دترمینان آن‌ها نیست.

دترمینان ضرب دو ماتریس

دترمینان ضرب دو ماتریس برابر با ضرب دترمینان‌های آن‌هاست.

$$|AB|=|A|\times|B|$$

وارون ماتریس‌های قطری

برای به‌دست آوردن وارون ماتریس‌های قطری کافیست درایه‌های قطر اصلی را معکوس کنیم.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۲- اگر $A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ باشد و $B=\left[\begin{array}{cc:c}۳ & ۱ & ۲\\ \hdashline A^{-۱} & & ۱\\ & & ۰\end{array}\right]$، $|B-I|$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

حال وارون A را به‌دست می‌آوریم و در ماتریس B قرار می‌دهیم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times۱-۴\times۱}\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ -۳ & ۴ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B-I=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۲\\ -۳ & ۳ & ۱\\ ۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B-I|=۲\underbrace{(-۳+۱)}_{-۲}-۱\underbrace{(۳-۱)}_{۲}+۲\underbrace{(۳-۳)}_{۰}=-۴-۲+۰=-۶$$

محاسبهٔ وارون ماتریس ۲×۲

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

ماز

۲۳- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix}ax & bx & cx\\ x+a & y+a & z+a\\ a^۲ & ab & ac\end{vmatrix}$ به کدام پارامتر وابسته است؟

۱) پارامترهای a، b و c
۲) فقط پارامتر x و a
۳) پارامترهای x، y و z
۴) مستقل از همهٔ پارامترهاست.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

از پارامتر x در سطر اول و از پارامتر a در سطر سوم فاکتور می‌گیریم و داریم:

$$\begin{vmatrix}ax & bx & cx\\ x+a & y+a & z+a\\ a^۲ & ab & ac\end{vmatrix}=x\times a\begin{vmatrix}a & b & c\\ x+a & y+a & z+a\\ a & b & c\end{vmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در این دترمینان سطر اول و سوم مثل هم هستند و حاصل دترمینان صفر است، بنابراین مقدار دترمینان به هیچ پارامتری وابسته نیست و مستقل از همهٔ پارامترهاست.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

دو نکتهٔ طلایی!

۱) می‌توان یک عدد را از سطر یا ستون دترمینان فاکتور گرفت.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

۲) اگر دو سطر یا دو ستون از یک دترمینان برابر یا مضرب هم باشند، حاصل دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = ۰$$

ماز

۲۴- اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $|A+B|=۶$ و $|B|=۲$ باشد، دترمینان ماتریس $I+AB^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

به جای ماتریس I از $BB^{-۱}$ استفاده می‌کنیم:

$$\left|I+AB^{-۱}\right| = \left|BB^{-۱}+AB^{-۱}\right| = \left|(B+A)B^{-۱}\right| = \frac{|B+A|}{|B|} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

قِلقِشو یاد بگیر!

برای به‌دست آوردن دترمینان ماتریس‌هایی که در آن‌ها I و وارون یک ماتریس وجود دارد با توجه به شرایط به جای I از $AA^{-۱}$ یا $A^{-۱}A$ استفاده می‌کنیم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\left|I+A^{-۱}BA\right| = \left|A^{-۱}A+A^{-۱}BA\right| = \left|A^{-۱}(I+B)A\right|$$

$$= \left|A^{-۱}\right||I+B||A| = \frac{۱}{|A|}|I+B||A| = |I+B|$$

دانستنی‌ها!

دترمینان ماتریس $\left|A^{-۱}+B^{-۱}\right|$ را می‌توان برحسب A و B به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\left|A^{-۱}\pm B^{-۱}\right| = \frac{|B\pm A|}{|A||B|}$$

ماز

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲۵- اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر باشد و $2A=\begin{bmatrix}5|A| & |2A| \\ 4 & |A^2|\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left\|2A^{-1}\right|A^4|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$|2A|=\begin{vmatrix}5|A| & |2A| \\ 4 & |A^2|\end{vmatrix} \Rightarrow 2^2|A|=5|A|^3-4(2^2|A|)$$

$$\Rightarrow 5|A|^3=20|A| \xrightarrow[|A|\neq 0]{A \text{ وارون‌پذیر است.}} |A|^2=4 \Rightarrow \begin{cases}|A|=2\\ |A|=-2\end{cases}$$

حال به سراغ محاسبهٔ $\left\|2A^{-1}\right|A^4|$ می‌رویم:

$$\left\|2A^{-1}\right|A^4|=\left|2^2|A^{-1}|A^4|\right|=\left|\frac{4}{|A|}A^4\right|=|2A^4|=2^2|A|^4=4\times 16=64$$

دقت کنید چه به‌ازای $|A|=2$ و چه به‌ازای $|A|=-2$ حاصل‌ها یکسان خواهد شد.

قِلِقِشو یاد بگیر!

از طرفین هر تساوی ماتریسی (اگر مربعی باشند!) می‌توان دترمینان گرفت.

ضریب به توان می‌رسه بعد از دترمینان میاد بیرون!

اگر k یک عدد حقیقی و A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

۲۶- یک $n+1$ ضلعی محدب را در نظر بگیرید. اگر دو رأس از این $n+1$ ضلعی کم کنیم از تعداد قطرهای آن ۱۱ واحد کم می‌شود. چه تعداد از گزاره‌های زیر دربارهٔ این $n+1$ ضلعی درست است؟

الف) از هر رأس آن ۵ قطر می‌گذرد.

ب) مجموع زوایای داخلی آن 1080° است.

ج) مجموع تعداد اضلاع و قطرهای آن ۲۸ است.

د) مجموع زوایای خارجی آن 2700° است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم تعداد قطرهای n ضلعی از رابطهٔ $\frac{n(n-3)}{2}$ به‌دست می‌آید، همچنین اگر دو رأس از رأس‌های یک $n+1$ ضلعی کم کنیم، به یک $n-1$ ضلعی تبدیل خواهد شد؛ بنابراین:

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}-11 \Rightarrow \cancel{n^2}-5n+4=\cancel{n^2}-n-2-22 \Rightarrow 4n=28 \Rightarrow n=7$$

بنابراین $n+1$ ضلعی ما اکنون یک ۸ ضلعی است، حال به بررسی موارد می‌پردازیم:

بررسی موارد:

الف

از هر رأس یک ۸ ضلعی $8-3=5$ قطر می‌گذرد. ✓

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ب

مجموع زوایای داخلی یک ۸ ضلعی برابر است با: $(۸-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۱۰۸۰^\circ$ ✓

ج

مجموع تعداد قطرها و اضلاع ۸ ضلعی برابر است با: $۸+\frac{۸\times ۵}{۲}=۲۸$ ✓

د

مجموع زوایای خارجی یک n ضلعی محدب همواره برابر ۳۶۰° است. ×

پس در مجموع ۳ گزاره درست است.

تعداد قطرهای یک n ضلعی

از هر رأس یک n ضلعی همواره $n-۳$ قطر می‌گذرد و در نتیجه تعداد کل قطرهای یک n ضلعی برابر است با:

$$D_n=\frac{n(n-۳)}{۲}$$

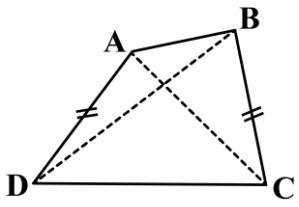
مجموع زوایای داخلی و خارجی یک n ضلعی محدب

مجموع زوایای خارجی یک n ضلعی محدب همواره برابر ۳۶۰° و مجموع زوایای داخلی آن برابر است با: $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

نتیجهٔ مهم: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی همواره مضرب صحیحی از ۱۸۰° است.

ماز

۲۷- در چهارضلعی ABCD مطابق شکل $AD=BC$ است. اگر وسط‌های دو قطر و وسط‌های اضلاع AB و DC را متوالیاً به هم وصل کنیم چهارضلعی به‌دست آمده کدام ویژگی را حتماً دارد؟



۱) قطرهای برابر دارد.

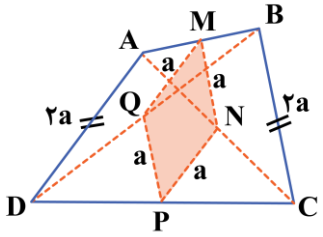
۲) اضلاع عمود بر هم دارد.

۳) قطرها عمودمنصف هم هستند.

۴) از برخورد نیمسازهای داخلی آن یک مربع ایجاد می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۰۳)

با چهار بار استفاده از حالت خاص تالس می‌توان نشان داد چهارضلعی به‌دست آمده لوزی است و قطرهای آن عمودمنصف هم هستند.



$$\triangle ABD \text{ تالس در } : MQ=\frac{۱}{۲}AD$$

$$\triangle ADC \text{ تالس در } : NP=\frac{۱}{۲}AD$$

$$\triangle ABC \text{ تالس در } : MN=\frac{۱}{۲}BC$$

$$\triangle DBC \text{ تالس در } : PQ=\frac{۱}{۲}BC$$

$$\xrightarrow{BC=AD} MQ=NP=MN=PQ \Rightarrow MNPQ \text{ لوزی است.}$$

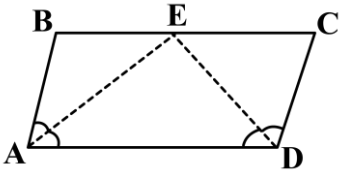
بدانید و آگاه باشید که...

از وصل کردن وسط‌های دو قطر و دو ضلع مقابل هر چهارضلعی محدب همواره یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که دو حالت خاص هم دارد:

۱) اگر دو ضلع مقابل دیگر برابر باشند چهارضلعی به‌دست آمده لوزی است.

۲) اگر امتداد دو ضلع مقابل دیگر بر هم عمود باشد، چهارضلعی به‌دست آمده مستطیل است.

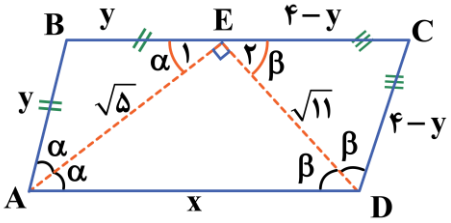
۲۸- در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل AE و DE نیمساز هستند، اگر $AE=\sqrt{۵}$ و $DE=\sqrt{۱۱}$ باشد، محیط متوازی‌الاضلاع ABCD کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۰۰۳)

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $E_۱=\alpha$ و $E_۲=\beta$ خواهد بود و چون مجموع هر دو زاویهٔ مجاور در متوازی‌الاضلاع برابر ۱۸۰° است، بنابراین:



$$۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

بنابراین $A\hat{E}D$ قائمه است؛ حال طبق فیثاغورس داریم:

$$x^۲=(\sqrt{۵})^۲+(\sqrt{۱۱})^۲=۵+۱۱=۱۶ \Rightarrow x=۴$$

حال با فرض $BE=y$ داریم: $EC=۴-y$ و چون مثلث ABE و مثلث ECD هر دو متساوی‌الساقین هستند، داریم:

$$AB=y \text{ و } CD=۴-y$$

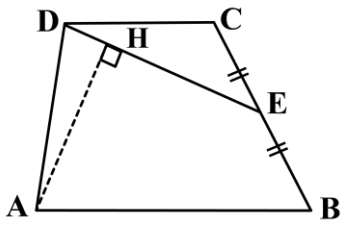
بنابراین محیط متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$(y)+(y)+(۴-y)+(۴-y)+x=۸+۴=۱۲$$

دانستنی‌ها!

نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور در هر متوازی‌الاضلاع همواره بر هم عمودند. به همین خاطر از برخورد نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع همواره یک مستطیل به‌دست می‌آید.

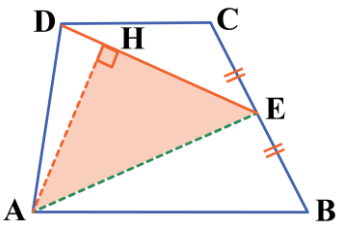
۲۹- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل، $AH \perp DE$ است. اگر $DE=۶$ و مساحت ذوزنقه برابر ۴۸ باشد، طول پاره‌خط AH کدام ست؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۰۰۳)

از E به A وصل می‌کنیم، در این صورت چون E وسط ساق BC است، مساحت مثلث ADE نصف مساحت ذوزنقه است، بنابراین:

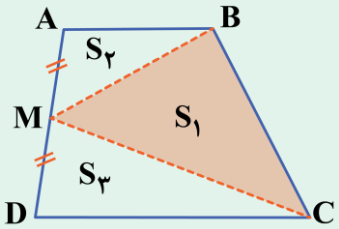


$$S_{\triangle ADE}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲}AH\times DE=۲۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲}AH\times ۶=۲۴ \Rightarrow AH=۸$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

قِلِقِشو یاد بگیر!

به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر از وسط یک ساق به دو سر ساق دیگر ذوزنقه وصل کنیم مساحت مثلث به وجود آمده نصف مساحت ذوزنقه است.

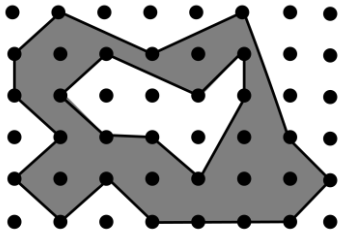


$$S_۱ = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

برای اثبات کافیست ارتفاع‌های دو مثلث ABM و MDC را رسم کنید و مجموع مساحت آن‌ها را پیدا کنید، این مجموع دقیقاً برابر با نصف مساحت ذوزنقه خواهد بود، پس مساحت مثلث رنگ شده نیز نصف دیگر خواهد بود.

ماز

۳۰- با توجه به مساحت چندضلعی شبکه‌ای، مساحت ناحیهٔ رنگ شده کدام است؟



۱) ۱۷
۲) ۱۷/۵
۳) ۱۸
۴) ۱۸/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۷۱ ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای از رابطهٔ $S = \frac{b}{۲} + (i - ۱)$ به‌دست می‌آید که b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی است. حال باید مساحت چندضلعی بزرگ را به‌دست آوریم و مساحت چندضلعی درونی را از آن کم کنیم:

$$S_۱ = \frac{۱۵}{۲} + (۱۸ - ۱) = ۷/۵ + ۱۷ = ۲۴/۵$$

$$S_۲ = \frac{۸}{۲} + (۳ - ۱) = ۴ + ۲ = ۶$$

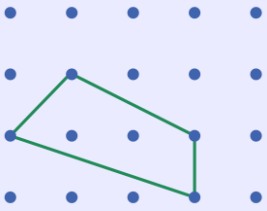
بنابراین مساحت قسمت رنگ شده برابر است با:

$$\Delta S = S_۱ - S_۲ = ۲۴/۵ - ۶ = ۱۸/۵$$

هر آنچه باید در مورد چندضلعی شبکه‌ای بدانید

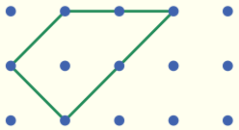
مطابق شکل، نقطه‌هایی که روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند به طوری که فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی روی یک خط افقی یا خط عمودی برابر یک واحد باشد را «نقاط شبکه‌ای» می‌نامند.

اگر یک چندضلعی، تمام رأس‌هایش روی نقاط شبکه‌ای باشند، «چندضلعی شبکه‌ای» نامیده می‌شود. مانند:



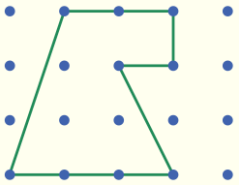
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱) نقاط شبکه‌ای واقع بر رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را **«نقاط مرزی»** می‌نامند و تعداد آن‌ها را با b نشان می‌دهند.



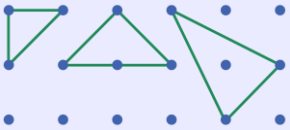
تعداد نقاط مرزی $= b = ۶$

۲) نقاط واقع در درون چندضلعی شبکه‌ای را **«نقاط درونی»** می‌نامند و تعداد آن‌ها را با i نشان می‌دهند.



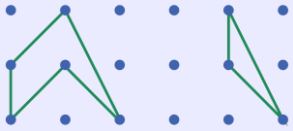
تعداد نقاط درونی $= i = ۳$

تعداد نقاط مرزی چندضلعی‌های شبکه‌ای هرگز کم‌تر از ۳ نمی‌تواند باشد یا به عبارت دیگر، هر چندضلعی شبکه‌ای حداقل ۳ نقطهٔ مرزی دارد.



$b \geq ۳ \Rightarrow$ چندضلعی شبکه‌ای

چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌توانند نقطهٔ درونی نداشته باشند یا به عبارت دیگر تعداد نقاط درونی چندضلعی‌های شبکه‌ای حداقل صفر است.



$i \geq ۰ \Rightarrow$ چندضلعی شبکه‌ای

اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

فرمول پیک: $S = \frac{b}{۲} + i - ۱$

۳۱- اگر عدد $\overline{۵a۰bb۹}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، رقم یکان $a + b^{۱۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که هم بر ۹ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

پیمانهٔ ۹: $۵ + a + ۰ + b + b + ۹ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲b + a \overset{۹}{\equiv} ۴$ (۱)

پیمانهٔ ۱۱: $۹ - b + b - ۰ + a - ۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} -۴ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$ (۲)

از رابطهٔ (۲) و این‌که ارقام یک عدد می‌توانند تنها صفر تا ۹ باشند، داریم:

$\Rightarrow a = ۷$

حال $a = ۷$ را در رابطهٔ (۱) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲b + ۷ \overset{۹}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۲b \overset{۹}{\equiv} -۳ \Rightarrow ۲b \overset{۹}{\equiv} -۳ + ۹ \overset{۹}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(۲,۹)=۱]{\div ۲} b \overset{۹}{\equiv} ۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به این‌که ارقام یک عدد بین صفر تا ۹ هستند، داریم:

$\Rightarrow b = ۳$

$۳^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ?$

نقطهٔ شروع: $\underbrace{۳^{۳} \times \left(۳^{۴}\right)^{۲}}_{۳^{۱۱}} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۳} \times (۱)^{۲} \Rightarrow ۳^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۳^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ + ۷ \Rightarrow ۳^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$

کلاس درس بخش‌پذیری‌ها

اگر $A = \overline{a_n a_{n-۱} ... a_۰}$، آن‌گاه:

۱) شرط بخش‌پذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{۳}{\equiv} a_n + a_{n-۱} + ... + a_۰$$

۲) شرط بخش‌پذیری بر ۴: عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{۴}{\equiv} \overline{a_۱ a_۰}$$

۳) شرط بخش‌پذیری بر ۹: عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{۹}{\equiv} a_n + a_{n-۱} + ... + a_۰$$

۴) شرط بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر از راست به چپ، ارقام آن را یکی در میان مثبت و منفی (با شروع از مثبت) جمع بزنیم، حاصلش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$A \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - ...$$

ویژگی‌های هم‌نهشتی!

۱) هر عدد با خودش هم نهشت است.

$$a \overset{m}{\equiv} a$$

۲) هم‌نهشتی دارای خاصیت تعدی است.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$$

۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک‌کردن اعداد دو طرف است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \text{ یا } ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن را قرار دهیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n|m} a \overset{n}{\equiv} b$$

۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d=(a,m)$ که همان ب.م.م a و m است تقسیم کنیم:

$$ax \overset{m}{\equiv} ay \xrightarrow[(a,m)=d]{\div a} x \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} y$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به‌صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

ماز

۳۲- اگر رابطهٔ $۲۰a-۹۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳۰a-۱۱۷$ همواره برقرار باشد، رقم یکان $(a^۲-۳a)^۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

از ساده کردن رابطهٔ داده شده خواهیم داشت:

$$۳۰a-۱۱۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۰a-۹۷ \Rightarrow ۱۰a \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow[(۱۰,۱۰۰)=۱۰]{\div ۱۰} a \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

$$(a^۲-۳a)^۳ \overset{۱۰}{\equiv} \left(۲^۲-۳(۲)\right)^۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

رقم یکان، همان باقی‌ماندهٔ عدد بر ۱۰

باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۱۰ برابر است با رقم یکان آن عدد.

$$\overline{a_n \ldots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۰}{\equiv} a_۰$$

ماز

۳۳- اگر آخرین سه‌شنبهٔ اردیبهشت ماه سالی ۳۰ام باشد، دومین یکشنبهٔ دی ماه همان سال چندم ماه است؟

۱) سیزدهم ۲) چهاردهم ۳) هفتم ۴) هشتم

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

برای رسیدن به دومین یکشنبهٔ دی‌ماه ابتدا، به‌دست می‌آوریم که روز اول دی‌ماه چند شنبه است. برای به‌دست آوردن تعداد روزهای سال از ۳۱ اردیبهشت تا ۱ دی ماه داریم:

اردیبهشت (۳۱ روزه) ← ۱ روز
خرداد (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز
تیر (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز
مرداد (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز
شهریور (۳۱ روزه) ← ۳۱ روز
مهر (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز
آبان (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز
آذر (۳۰ روزه) ← ۳۰ روز
دی (۳۰ روزه) ← ۱ روز

$$۱+۴\times۳۱+۳\times۳۰+۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \Leftarrow$$

سه‌شنبه را به عنوان اولین روز در نظر می‌گیریم:

سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

پس عدد ۶ متناظر روز دوشنبه است. یعنی اول دی روز دوشنبه است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

حال می‌یابیم که اولین یکشنبهٔ دی چندم است:

۱ دی	دوشنبه
۲ دی	سه‌شنبه
۳ دی	چهارشنبه
۴ دی	پنج‌شنبه
۵ دی	جمعه
۶ دی	شنبه
۷ دی (اولین)	یک‌شنبه

پس برای رسیدن به دومین یکشنبهٔ دی کافی‌ست که ۷ روز پیش برویم:

دومین یک‌شنبه $۷+۷=۱۴$ دی

تقویم نگاری

فرض کنید بدانیم یکی از روزهای سال، چه روزی از هفته است. به کمک هم‌نهشتی می‌توانیم تعیین کنیم که هر تاریخ دیگری، چه روزی از هفته است. دلیل این موضوع آن است که هر روز هفته بعد از ۷روز دوباره تکرار می‌شود. بنابراین کافی است فاصلهٔ دو روز را از هم به‌دست آوریم و سپس عدد حاصل را بر ۷ تقسیم کنیم. باقی‌ماندهٔ این تقسیم نشان می‌دهد که روز مورد نظر چند روز در هفته جلوتر از روز اولیه است.

۳۴- معادلهٔ $۴a^۲x\overset{۳}{\equiv}۱۰-۸x$ به‌ازای جمیع مقادیر صحیح a، چند جواب طبیعی سه رقمی برای x دارد؟

۱) ۲۹۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی ـ زمان‌بَر ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۴a^۲x+۸x\overset{۳}{\equiv}۱۰\Rightarrow ۴a^۲x-۳a^۲x+۸x-۶x\overset{۳}{\equiv}۱۰-۳\times ۳\Rightarrow (a^۲+۲)x\overset{۳}{\equiv}۱$$

حال با توجه به این‌که شرط وجود جواب این است که $(a^۲+۲,۳)\mid ۱$، یعنی عدد $a^۲+۲$ نباید مضرب ۳ باشد. پس داریم:

$$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}a=۳k\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۲ \checkmark\\ a=۳k+۱\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۱+۲=۳k'' \times\\ a=۳k+۲\Rightarrow a^۲+۲=۳k'+۱+۲=۳k'' \times\end{cases}$$

$$\Rightarrow (۳k'+۲)x\overset{۳}{\equiv}۱\Rightarrow ۲x\overset{۳}{\equiv}۱+۳=۴\xrightarrow[(۲,۳)=۱]{\div ۲} x\overset{۳}{\equiv}۲\Rightarrow x=۳k+۲$$

حال برای این‌که جواب سه‌رقمی باشد باید بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ باشد:

$$۱۰۰\le ۳k+۲\le ۹۹۹\Rightarrow ۳۳\le k\le ۳۳۲$$

تعداد جواب: $۳۳۲-۳۲=۳۰۰$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ هم‌نهشتی

شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{c}{\equiv}b$ جواب داشته باشد این است که: $(a,c)\mid b$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۳۵- اگر معادلهٔ هم‌نهشتی $\overline{۲a۷۴}^{۴۴} \equiv ۳۳x$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی y که در رابطهٔ $(a+a^۲+a^۳)y \overset{۶}{\equiv} ۲a$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا شرط وجود جواب را بررسی می‌کنیم:

شرط وجود جواب: $(۳۳,۴۴)\mid \overline{۲a۷۴} \Rightarrow ۱۱ \mid \overline{۲a۷۴}$

حال برای این‌که $\overline{۲a۷۴}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد داریم:

$$۴-۷+a-۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \Rightarrow a=۵$$

توجه داریم که چون a یک رقم است برابر ۵ می‌باشد. پس با جای‌گذاری a در رابطهٔ دوم داریم:

$$(۵+۵^۲+۵^۳)y \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow (-۱+۱-۱)y \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow y \overset{۶}{\equiv} -۴$$

$$y=۶k-۴ \xrightarrow{k=۱۸} ۱۰۸-۴=۱۰۴$$

$$۱+۰+۴=۵$$

۳۶- جعبه‌ای شامل ۱۰ گوی با شماره‌های $۱۰,\ldots,۳,۲,۱$ است. گوی‌ها را یکی پس از دیگری از جعبه بیرون می‌آوریم. اگر بدانیم گوی ۲ زودتر از گوی ۷ بیرون آمده است. چقدر احتمال دارد که گوی ۵ به عنوان اولین گوی آمده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

احتمال اولین بودن هر گوی از گوی‌های دهگانه مستقل از یکدیگر و برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است. با علم به این‌که ۲ زودتر از ۷ بیرون آمده است مانند آن است که گوی ۷ شانس خود را به ۲ داده باشد و شانس اولین بودن ۲ برابر $\frac{۲}{۱۰}$ و شانس اولین بودن گوی ۷ برابر صفر شده و شانس اول بودن هر یک از گوی‌های دیگر از جمله گوی ۵ برابر $\frac{۱}{۱۰}$ است.

روش دوم

فضای نمونهٔ کاهش یافته:

توجه کنید که گوی‌ها می‌توانند به $۱۰!$ طریق یکی پس از دیگری از جعبه بیرون بیایند. اما چون می‌دانیم که ۲ زودتر از ۷ بیرون آمده تعداد حالت‌ها نصف می‌شود، چون در نیمی از حالت‌ها ۷ زودتر از ۲ خارج می‌شود و در نیمی دیگر ۲ زودتر از ۷.

حال اگر بخواهیم که ۵ اولین گوی بیرون آمده باشد، پس اولین گوی مشخص است و ۹ گوی بعدی به $۹!$ طریق می‌توانند خارج شوند. اما باز هم چون می‌دانیم که ۲ زودتر از ۷ خارج شده، تعداد حالت‌ها نصف می‌شود. اگر پیشامد اولین عدد بودن ۵ را A بنامیم، داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۹!}{۲}}{\frac{۱۰!}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

روش سوم

اگر پیشامد زودتر آمدن ۲ از ۷ را B و اولین عدد بودن ۵ را A بنامیم، داریم:

چون در نیمی از حالت‌ها ۷ زودتر از ۲ خارج می‌شود و در نیمی دیگر ۲ زودتر از ۷:

$$P(B)=\frac{۱}{۲}$$

چون دو پیشامد مستقل هستند داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}$$

پس در نهایت:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۰}$$

دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه وقوع هر یک بر وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. برای دو پیشامد مستقل داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

احتمال شرطی

اگر B پیشامدی باشد که احتمال وقوع آن ناصفر است، پیشامد «**وقوع A به شرط وقوع B**» را با $A|B$ نشان می‌دهیم و احتمال آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ماز

۳۷- اگر فضای نمونهٔ $S=\{a,b,c,d,e\}$ چنان باشد که $P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})$، $P(a)=۲P(d)$ و $P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}$، آن‌گاه $P(a)$ کدام خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۱۰۲)

از فرض $P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}$ داریم:

$$P(\{b,e\})=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(\{a,c,d\})=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}\ (۱)$$

و از فرض‌های $P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})$ و $P(a)=۲P(d)$ داریم:

$$P(\{a,c\})=۳P(\{a,d\})\Rightarrow P(a)+P(c)=۳P(a)+۳P(d)\Rightarrow P(c)=۲P(a)+۳P(d)\xrightarrow{P(a)=۲P(d)}P(c)=۷P(d)\ (۲)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اکنون با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$P(\{a,c,d\})=\frac{۵}{۸}\Rightarrow P(a)+P(c)+P(d)=\frac{۵}{۸}\Rightarrow ۲P(d)+۷P(d)+P(d)=\frac{۵}{۸}\Rightarrow P(d)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(a)=۲P(d)\Rightarrow P(a)=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

فضای احتمال غیرهم‌شانس

یک فضای احتمال را **فضای احتمال غیرهم‌شانس** گوییم، اگر حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک عضوی) از فضای نمونه احتمالشان با یکدیگر برابر نباشد.

اما در **فضای احتمال هم‌شانس** احتمال رخ دادن هر کدوم از پیشامدهای تک‌عضوی برابر و مساوی با $\frac{۱}{n(S)}$ است.

۳۸- در درون جعبه‌ای ۵ کارت وجود دارد که ۳ تا از آن‌ها هر دو رو قرمز، یکی از آن‌ها هر دو رو سفید و بالاخره یکی از آن‌ها چنان است که یک رو سفید و یک رو قرمز است. از درون جعبه کارتی برداشته و به یک روی آن نگاه می‌کنیم. اگر آن رو، سفید باشد دو سکه و اگر قرمز باشد سه سکه پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً دو تا از سکه‌ها پشت باشند، حدوداً چند درصد است؟

۱) ۴۰ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۱۰۲)

برای محاسبهٔ احتمال سفید بودن روی مشاهده شده یا قرمز بودن آن دو روش داریم:

روش اول

در مجموع ۲×۵ یعنی ۱۰ وجه وجود دارد، که از بین آن‌ها ۷ وجه قرمز و ۳ وجه سفید هستند و همگی وجوه با یکدیگر شانس یکسانی دارند.

پس:

$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۱۰}\quad و\quad P(\text{قرمز})=\frac{۷}{۱۰}$$

روش دوم

استفاده از قانون احتمال کل:

$$P(\text{سفید})=(\frac{۱}{۵}\times ۱)+(\frac{۳}{۵}\times ۰)+(\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۱۰}\quad و\quad P(\text{قرمز})=(\frac{۳}{۵}\times ۱)+(\frac{۱}{۵}\times ۰)+(\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۷}{۱۰}$$

حال برای محاسبهٔ احتمال مطلوب بنابر قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{۲تا پشت})=P(\text{سفید}).P(\text{۲تا پشت}|\text{سفید})+P(\text{قرمز}).P(\text{۲تا پشت}|\text{قرمز})$$

$$P(\text{۲تا پشت})=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۷}{۱۰}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳}=\frac{۶+۲۱}{۸۰}=\frac{۲۷}{۸۰}=۰/۳۳۷۵$$

$$۰/۳۳۷۵\times ۱۰۰=۳۳/۷۵\simeq \%۳۴$$

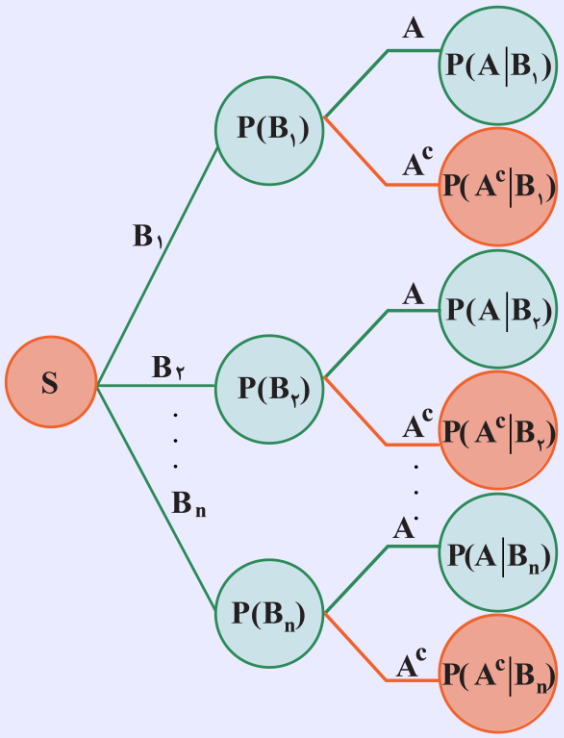
قانون احتمال کل

در مسائل مربوط به قانون احتمال کل می‌خواهیم احتمال وقوع پیشامدی مانند A را به دست آوریم به طوری که وقوع این پیشامد به پیشامدهای $B_۱, B_۲, B_۳, ..., B_n$ وابسته است، یعنی ممکن است $B_۱$ رخ داده باشد و A رخ دهد یا $B_۲$ رخ داده باشد و A رخ دهد و ... و در نهایت این احتمال‌ها را با هم جمع می‌کنیم. به این فرآیند (قانون احتمال کل) می‌گوییم.

$$P(A)=P(B_۱)\times P(A|B_۱)+P(B_۲)\times P(A|B_۲)+...+P(B_n)\times P(A|B_n)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

استفاده از رسم نمودار درختی برای احتمال کل:



۳۹- جعبهٔ A دارای ۴ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز و جعبهٔ B دارای ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن بیرون کشیده شده است. اگر بدانیم مهرهٔ خارج شده قرمز است، احتمال آن‌که جعبهٔ B انتخاب شده باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۱۰۲)

طبق خواستهٔ صورت سؤال مشخص است که از کل به جزء می‌رسیم و باید از قانون بیز استفاده کنیم:

$$P(B|\text{قرمز}) = \frac{P(B)P(\text{قرمز}|B)}{P(\text{قرمز})} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

قانون بیز

در احتمال کل، احتمال قسمت‌های جزئی را پیدا می‌کردیم و سپس با جمع کردن احتمال‌های به‌دست آمده، به احتمال کل می‌رسیدیم. حالا تصور کنید که در سوال، پیشامد مطلوب به صورت احتمال شرطی بیان شود و احتمال یکی از قسمت‌های جزئی خواسته شود یعنی باید از کل به جزء برسیم، این سبک احتمال را **«قانون بیز»** می‌نامیم.

$$P(A|B) = \frac{\overbrace{P(A)\times P(B|A)}^{\text{یک قسمت از محاسبهٔ احتمال کل}}}{\underbrace{P(B)}_{\text{احتمال کل}}}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

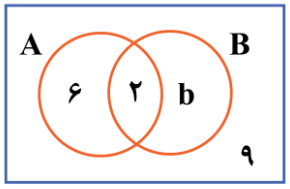
۴۰- اگر پیشامدهای A و B چنان باشند که $n(A)=۸$، $n(A\cap B)=۲$ و $n(A'\cap B')=۹$ و تمام اعضای فضای نمونه هم‌شانس باشند، آن‌گاه با فرض مستقل بودن A و B، P(B) کدام خواهد شد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ آمار و احتمال صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۱۰۲)

روش اول

شرط مستقل بودن در احتمال اشتراک:



$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$\Rightarrow \frac{۲}{۱۷+b}=\frac{۸}{۱۷+b}\times\frac{۲+b}{۱۷+b}\Rightarrow ۸+۴b=۱۷+b\Rightarrow b=۳$$
$$P(B)=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم

شرط مستقل بودن در احتمال شرطی:

$$P(B|A)=P(B)\Rightarrow \frac{۲}{۸}=\frac{۲+b}{۱۷+b}\Rightarrow b=۳$$
$$P(B)=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

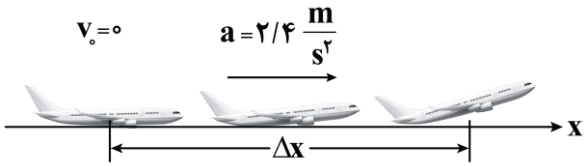
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بودجه‌بندی این آزمون: فیزیک ۱: دما و گرما - صفحه‌های ۸۳ تا ۱۲۶
فیزیک ۳: حرکت بر خط راست + دینامیک و حرکت دایره‌ای (از حرکت با شتاب ثابت تا قبل از نیروی کشش طناب) صفحه‌های ۱۵ تا ۴۴

سهم در کنکور: پایهٔ دهم: درمجموع ۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۴ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

۴۱- شکل زیر، هواپیمایی را نشان می‌دهد که از حال سکون و با شتاب ثابت $۲/۴\frac{m}{s^۲}$ روی باند پرواز و در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. هواپیما برای رسیدن به شرایط برخاستن، باید به سرعت $۹۶\frac{m}{s}$ برسد. در این مدت‌زمان، چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟



الف ـ مدت‌زمان لازم برای برخاستن هواپیما ۴۰s است.
ب ـ در این مدت‌زمان، هواپیما ۱۹۲۰m مسافت را طی می‌کند.
ج ـ در این مدت‌زمان، سرعت و شتاب هواپیما در یک جهت است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف

مدت‌زمان لازم برای این‌که سرعت هواپیما از صفر به $۹۶\frac{m}{s}$ برسد را به‌راحتی می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow ۹۶=۲/۴t+۰ \Rightarrow t=۴۰s \quad (✓)$$

ب

روش اول

ازآنجایی‌که هواپیما تغییر جهت نداده، مسافت طی‌شده در این مدت‌زمان با بزرگی جابه‌جایی آن یکسان و برابر است با:

$$\ell=\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t=\frac{۱}{۲}\times ۲/۴\times ۴۰^۲=۱۹۲۰m \quad (✓)$$

روش دوم

بدون درنظر گرفتن مدت‌زمان و به کمک معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی نیز می‌توان مسافت طی‌شده را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۹۶^۲-۰=۲\times ۲/۴\times \Delta x \Rightarrow \ell=\Delta x=۱۹۲۰m \quad (✓)$$

ج

چون حرکت هواپیما در این مدت‌زمان تندشونده است (تندی هواپیما درحال افزایش است.)؛ بنابراین سرعت و شتاب هواپیما در یک جهت است. (✓)

پس هر سه عبارت مطرح‌شده صحیح هستند.

۴۲- متحرکی با شتاب ثابت روی محور x درحال حرکت است و بردار جابه‌جایی آن در ثانیه‌های پنجم و هفتم به‌ترتیب $-۴/۲m(\vec{i})$ و $-۳/۴m(\vec{i})$ است. معادلهٔ سرعت ـ زمان این متحرک در SI کدام است؟

۱) $v=۰/۴t-۴$ ۲) $v=۰/۴t-۶$ ۳) $v=۰/۶t-۴$ ۴) $v=۰/۶t-۶$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

با توجه به این‌که در حرکت شتاب ثابت، جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم به‌صورت $\Delta x = \frac{(۲n-۱)}{۲}aT^۲ + v_۰T$ است، خواهیم داشت:

یک ثانیهٔ پنجم: $\begin{cases} T=۱ \\ n=۵ \end{cases} \Rightarrow -۴/۲ = \frac{۹}{۲}a(۱)^۲ + v_۰(۱) \Rightarrow ۴/۵a + v_۰ = -۴/۲$

یک ثانیهٔ هفتم: $\begin{cases} T=۱ \\ n=۷ \end{cases} \Rightarrow -۳/۴ = \frac{۱۳}{۲}a(۱)^۲ + v_۰(۱) \Rightarrow ۶/۵a + v_۰ = -۳/۴$

گام دوم

با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول بالا خواهیم داشت:

$$\Rightarrow a = ۰/۴\frac{m}{s^۲}\ ,\ v_۰ = -۶\frac{m}{s}$$

گام آخر

درنتیجه معادلهٔ سرعت ـ زمان به‌صورت زیر است:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۰/۴t - ۶$$

راهنمای زرنگ‌بازی

بچه‌ها توی حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی‌های متوالی توی بازه‌های زمانی یکسان، یه دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ تشکیل می‌دن.

پس اختلاف جابه‌جایی توی ثانیهٔ هفتم و پنجم می‌شه ۲a. درنتیجه $a = \frac{۰/۸}{۲} = ۰/۴\frac{m}{s^۲}$ می‌شه.

محاسبهٔ جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم

جابه‌جایی‌های انجام‌شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهند.

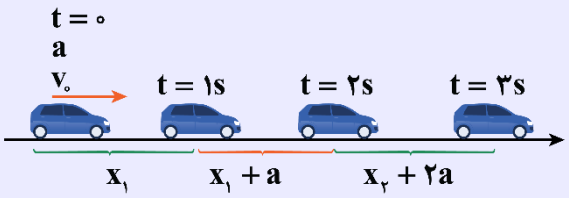
جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم: $\Delta x_{n,T} = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ اول: $\Delta x_{T,۱} = ۰/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ دوم: $\Delta x_{T,۲} = ۱/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ سوم: $\Delta x_{T,۳} = ۲/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ چهارم: $\Delta x_{T,۴} = ۳/۵aT^۲ + v_۰T$

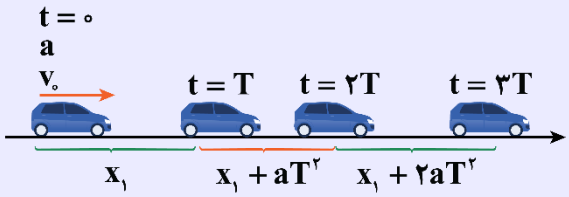


حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم:

$$\Delta x_n = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱) + v_۰$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a می‌دهند.

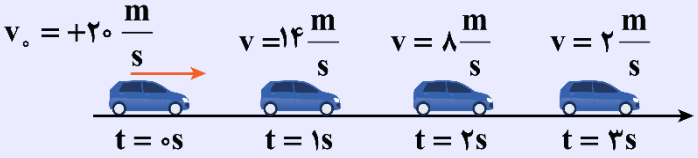
۱- در هر ثانیه جابه‌جایی یک a تغییر می‌کند.



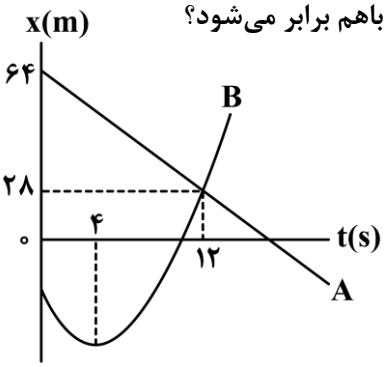
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۲- در هر ثانیه سرعت یک a تغییر می‌کند.

$a=-۶\frac{m}{s^۲}$



۴۳- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل به‌صورت خط راست و سهمی است. در لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، تندی متحرک B، $\frac{۱۶}{۳}$ برابر تندی متحرک A است. سرعت این دو متحرک در چه لحظه‌ای باهم برابر می‌شود؟



۱) ۱/۵
۲) ۳
۳) ۲/۵
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

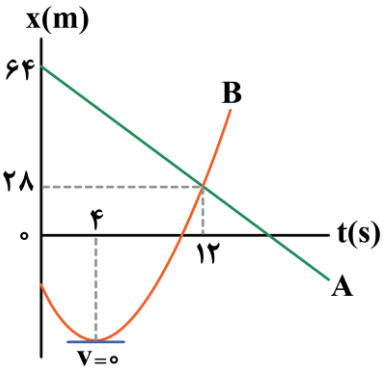
گام اول

متحرک A با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین با محاسبهٔ شیب خط A، به‌راحتی سرعت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$v_A=\overbrace{\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t}}}^{\text{شیب خط A}}=\frac{۲۸-۶۴}{۱۲-۰}=-۳\frac{m}{s}$$

گام دوم

دو متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ به‌هم می‌رسند. در این لحظه تندی متحرک B، $\frac{۱۶}{۳}$ برابر تندی متحرک A است؛ بنابراین داریم:



در لحظهٔ $t=۱۲s$: $|v_B|=\frac{۱۶}{۳}\times|-۳|=۱۶\frac{m}{s}\xrightarrow[\text{لحظه مثبت است.}]{\text{شیب نمودار B در این}}v_B=۱۶\frac{m}{s}$

گام سوم

در لحظهٔ $t=۴s$ (رأس سهمی)، سرعت متحرک B برابر صفر است؛ بنابراین شتاب حرکت متحرک B برابر است با:

$$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۶-۰}{۱۲-۴}=۲\frac{m}{s^۲}$$

گام چهارم

به کمک معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، سرعت اولیهٔ متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_B=۱۶\frac{m}{s}]{t=۱۲s,\,a_B=۲\frac{m}{s^۲}}۱۶=۲\times۱۲+v_{۰B}\Rightarrow v_{۰B}=-۸\frac{m}{s}$$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

حال برای این‌که سرعت دو متحرک یکسان شود، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_A = -۳\dfrac{m}{s} \\ v_B = a_B t + v_{۰B} = ۲t - ۸ \end{cases} \xrightarrow{v_A = v_B} ۲t - ۸ = -۳ \Rightarrow ۲t = ۵ \Rightarrow t = ۲/۵s$$

ماز

۴۴- یک گلوله را باید از چه ارتفاعی برحسب متر در شرایط خلأ رها کنیم تا پس از گذشت مدت‌زمان ۲/۴s به سطح زمین برسد؟

$$(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$$

۱) ۲۸/۸ ۲) ۵۷/۶ ۳) ۱۴/۴ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

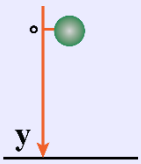
اگر جهت مثبت را رو به پایین فرض کنیم، معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت سقوط آزاد برابر است با:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = \Delta y = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲/۴^۲ = ۲۸/۸m$$

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند، درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد می‌گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رهاشدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین فرض می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب، مکان و سرعت در هرلحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رهاشدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۰]{y_۰ = ۰} y = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_۰ \xrightarrow{v_۰ = ۰} v = gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y \xrightarrow[y_۰ = ۰]{v_۰ = ۰} v^۲ = ۲gy$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{۱}{۲}gt$$

ماز

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۵- در شکل زیر، یک کشتی درحال حرکت را می‌بینید که نیروهای وارد بر آن متوازن هستند. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد این شکل نادرست است؟

الف ـ اندازهٔ نیروی پیشران، بزرگ‌تر از اندازهٔ نیروی مقاومت است.

ب ـ اندازهٔ نیروی شناوری برابر با اندازهٔ نیروی وزن است.

ج ـ عکس‌العمل نیروی پیشران به کشتی وارد می‌شود.

د ـ عکس‌العمل نیروی شناوری به مرکز زمین وارد می‌شود.

۱) ۴ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:

نیروهای وارد بر کشتی متوازن هستند، پس برایند نیروها هم در راستای قائم و هم در راستای افقی برابر صفر است:

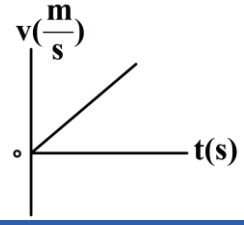
الف) (✗) اندازهٔ نیروی مقاومت = اندازهٔ نیروی پیشران $\Rightarrow F_{net,x}=0$

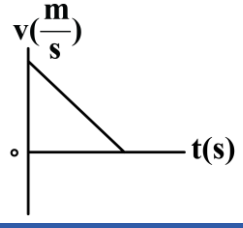
ب) (✓) اندازهٔ نیروی وزن = اندازهٔ نیروی شناوری $\Rightarrow F_{net,y}=0$

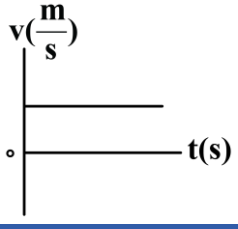
ج) پرّه‌های موتور کشتی برای حرکت رو به جلو، نیرویی به سمت عقب به آب وارد می‌کنند و واکنش این نیرو که درواقع همان نیروی پیشران است از طرف آب و در جهت جلو به کشتی وارد می‌شود. پس اگر نیروی پیشران را که به کشتی وارد می‌شود، کنش درنظر بگیریم، واکنش آن به عامل به‌وجودآورندهٔ آن یعنی به آب وارد می‌شود. (✗)

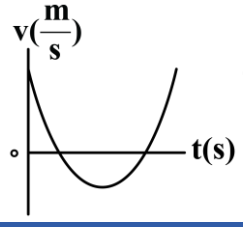
د) نیروی شناوری از طرف آب به کشتی وارد می‌شود و واکنش آن از طرف کشتی به آب وارد می‌شود. (✗)

۴۶- اگر نیروهای وارد بر یک جسم درحال حرکت، متوازن باشند، کدام گزینه می‌تواند نمایانگر نمودار سرعت ـ زمان این جسم باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ نموداری ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۲)

طبق قانون اول نیوتون، اگر برایند نیروهای وارد به جسمی صفر باشد، جسم حالت قبلی خود را حفظ می‌کند، یعنی یا حالت سکون $(v=0)$ خود را حفظ می‌کند و یا با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد این یعنی نمودار سرعت ـ زمان این جسم باید خطی راست و افقی باشد و گزینهٔ (۳) صحیح است.

قانون اول نیوتون

اگر نیروهای وارد بر جسم متوازن باشند، جسم حالت اولیهٔ خود را حفظ می‌کند؛ بنابراین اگر ساکن بود، ساکن باقی می‌ماند و اگر درحال حرکت بود با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین اگر نیروهای وارد بر یک جسم متوازن باشند، نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت خطی افقی و نمودار مکان ـ زمان به‌صورت خطی با شیب ثابت است.

$F_{net}=0 \Rightarrow a=0$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴۷- بر جسم ساکنی که روی سطح زمین قرار دارد، فقط دو نیروی افقی و هم‌راستای F_1 و $F_2 < F_1$ وارد می‌شود. بیش‌ترین و کم‌ترین شتابی که جسم می‌تواند براثر اعمال هم‌زمان این دو نیرو بگیرد $۱۲\frac{m}{s^2}$ و $۷/۲\frac{m}{s^2}$ است. جرم جسم را چگونه تغییر دهیم تا اگر فقط نیروی F_2 بر جسم اثر کند، شتابی به‌اندازهٔ $۴\frac{m}{s^2}$ به آن بدهد؟

۱) ۴۰ درصد افزایش یابد. ۲) ۲۵ درصد کاهش یابد. ۳) ۴۰ درصد کاهش یابد. ۴) ۲۵ درصد افزایش یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

این دو نیرو هنگامی بیش‌ترین شتاب را به جسم می‌دهند که هم‌جهت باشند و هنگامی کم‌ترین شتاب را به جسم می‌دهند که خلاف جهت هم باشند. به کمک قانون دوم نیوتون و تشکیل دستگاه زیر، نیروی F_2 را برحسب جرم به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{max} = ma_{max} \Rightarrow F_1 + F_2 = ۱۲m \\ F_{min} = ma_{min} \Rightarrow F_1 - F_2 = ۷/۲m \end{cases} \Rightarrow F_2 = ۲/۴m$$

گام دوم

اگر نیروی F_2 به‌تنهایی به جسم وارد شود و جرم جسم m' باشد، شتاب جسم $۴\frac{m}{s^2}$ خواهد شد:

$$F_2 = m'a \Rightarrow ۲/۴m = ۴m' \Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{۲/۴}{۴} = ۰/۶ \Rightarrow m' = ۰/۶m$$

گام آخر

حالا با توجه به نسبت $\frac{m'}{m}$، درصد تغییرات m را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات } m = \frac{m' - m}{m} \times ۱۰۰ = \frac{(۰/۶ - ۱)m}{m} \times ۱۰۰ = -۴۰٪$$

درنتیجه باید جرم جسم را ۴۰ درصد کاهش دهیم.

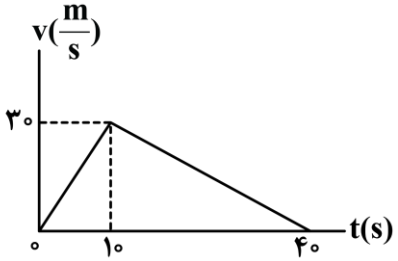
قانون دوم نیوتون

اگر برایند نیروهای وارد بر جسم صفر نباشد، جسم شتاب می‌گیرد که شتاب آن از رابطهٔ $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{net}}{m}$ به‌دست می‌آید.

۴۸- شکل زیر یک قایق موتوری را نشان می‌دهد که جرم آن با سرنشینش ۵۰۰kg است و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل است. با فرض ثابت‌بودن نیروی مقاومت واردشده بر قایق در بازهٔ زمانی صفر تا ۴۰s، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟ (در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۴۰s، موتور قایق خاموش شده است.)

الف ـ در مدتی که قایق درحال حرکت است، بزرگی نیروی مقاومت واردشده بر آن برابر با ۵۰۰N است.

ب ـ بزرگی نیروی پیشران در لحظهٔ $t = ۶s$ برابر با ۲۰۰۰N است.



۱) فقط «الف» ۲) فقط «ب» ۳) «الف» و «ب» ۴) هیچ‌کدام

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

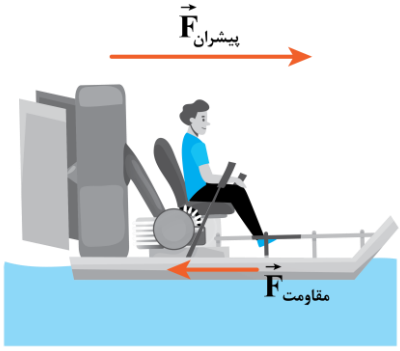
بررسی موارد:

الف) در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۴۰s، تنها نیروی واردشده بر قایق در راستای حرکت آن، نیروی مقاومت است. ابتدا شتاب حرکت را به کمک شیب نمودار محاسبه کرده و سپس بزرگی نیروی مقاومت را با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آوریم:

$$a_۲ = \frac{v_{۴۰s} - v_{۱۰s}}{۴۰ - ۱۰} = \frac{-۳۰}{۳۰} = -۱\frac{m}{s^۲}$$

$$F_{net_۲} = ma_۲ \Rightarrow -F_{\text{مقاومت}} = ma_۲ \Rightarrow |F_{\text{مقاومت}}| = ma_۲ = ۵۰۰ \times ۱ = ۵۰۰N \quad (\checkmark)$$

ب) با توجه به این‌که بزرگی نیروی مقاومت ثابت فرض شده است و در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s، شتاب حرکت قایق (شیب نمودار) ثابت است، پس در این بازه، نیروی پیشران نیز ثابت است و داریم:



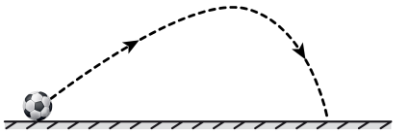
$$a_۱ = \frac{v_{۱۰s} - v_۰}{۱۰ - ۰} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\frac{m}{s^۲}$$

$$F_{net_۱} = ma_۱ \Rightarrow F_{\text{پیشران}} - F_{\text{مقاومت}} = ma_۱$$

$$\Rightarrow F_{\text{پیشران}} - ۵۰۰ = ۵۰۰ \times ۳ \Rightarrow F_{\text{پیشران}} = ۲۰۰۰N \quad (\checkmark)$$

ماز

۴۹- مطابق شکل زیر، توپی به جرم ۴۰۰g شوت می‌شود. اگر در بالاترین نقطه، نیروی خالصی به بزرگی ۵N به توپ وارد شود، بردار نیروی مقاومت هوا در این نقطه برحسب نیوتون، کدام است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



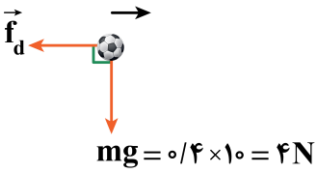
۱) $-۳\vec{i}$ ۲) $۳\vec{i}$

۳) $۵\vec{i}$ ۴) $-۵\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نیروهای وارد بر توپ در بالاترین نقطه را رسم می‌کنیم:



گام آخر

نیروی مقاومت هوای وارد بر توپ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که $\vec{f}_d$ و $m\vec{g}$ عمود بر یکدیگرند و بزرگی برایند آن‌ها ۵N است، داریم:

$$F_{net} = \sqrt{f_d^۲ + (mg)^۲} \Rightarrow ۵ = \sqrt{f_d^۲ + ۴^۲} \Rightarrow f_d^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow f_d = ۳N$$

از طرفی با توجه به این‌که در بالاترین نقطه، جهت حرکت (سرعت) به سمت راست است، $\vec{f}_d$ به سمت چپ است:

$$\vec{f}_d = -۳(N)\vec{i}$$

ماز

۵۰- چتربازی به جرم ۷۰kg مدتی پس از پرش آزاد، چترش را باز می‌کند. ناگهان نیروی مقاومت هوا به ۱۱۹۰N افزایش می‌یابد. شتاب چترباز در این لحظه چند متر بر مربع ثانیه و به چه سمتی است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

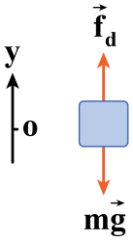
۱) ۷ و به سمت بالا ۲) ۷ و به سمت پایین

۳) ۳ و به سمت بالا ۴) ۳ و به سمت پایین

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به نیروهای وارد به چترباز داریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow f_d - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۱۱۹۰ - ۷۰۰ = ۷۰a \Rightarrow a = ۷\frac{m}{s^۲}$$

چون $mg < f_d$ است، برایند نیروها و شتاب به سمت بالا است.

حرکت چترباز

حرکت چترباز را در سه حالت مختلف بررسی می‌کنیم.

در همهٔ حالت‌ها فرض می‌کنیم چترباز روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند و اثر باد و عوامل دیگر را درنظر نمی‌گیریم.

در تمامی حالت‌ها بر چترباز دو نیرو وارد می‌شود:

۱- نیروی وزن:

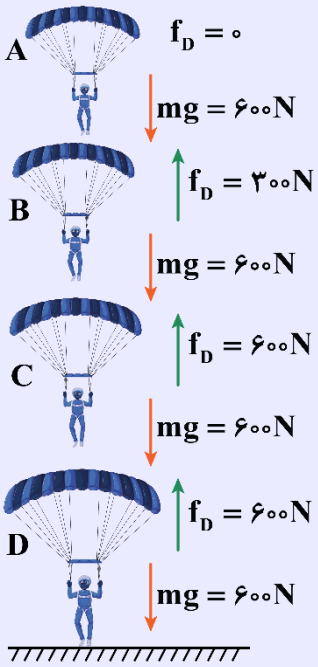
نیروی وزن همواره در راستای قائم به سمت پایین می‌باشد. مقدار نیروی وزن در کل مسیر حرکت را ثابت درنظر می‌گیریم.

۲- نیروی مقاومت هوا:

چون چترباز به سمت پایین حرکت می‌کند، نیروی مقاومت هوا خلاف جهت حرکت چترباز (همواره به سمت بالا) می‌باشد.

با افزایش تندی مقدار مقاومت هوا زیاد می‌شود.

زمانی که چترباز چترش را باز می‌کند به‌دلیل افزایش مساحت، نیروی مقاومت هوا نسبت به قبل به‌شدت افزایش می‌یابد و برای مدتی بزرگ‌تر از نیروی وزن می‌شود.



چترباز دو بار می‌تواند به تندی حدی برسد:

۱- قبل از بازشدن چتر و به کمک سطح بدنش $(v_۱)$

۲- بعد از بازشدن چتر و به کمک سطح چتر $(v_۲)$

$$v_۲ < v_۱ \Leftarrow$$

در حرکت چترباز نیروی مقاومت هوا به دو صورت می‌تواند تغییر کند:

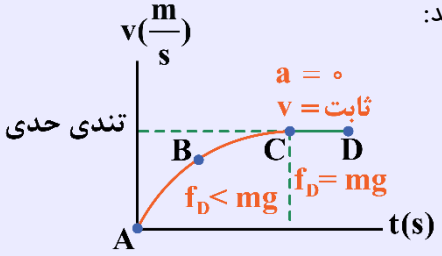
۱- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا تدریجی باشد: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل افزایش تندی است.

۲- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا سریع انجام شود: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل بازشدن چتر است.

در کل مسیر حرکت، چترباز هرگز به سمت بالا حرکت نمی‌کند.

با توجه به زمان باز کردن چتر توسط چترباز دو حالت داریم:

الف) چترباز بلافاصله پس از پرش، چتر خود را باز می‌کند:



در این حالت، نیروی مقاومت هوا در ابتدا ناچیز است. با افزایش تندی چترباز این نیرو افزایش پیدا می‌کند تا این‌که اندازهٔ این نیرو با اندازهٔ نیروی وزن برابر شود. در این حالت شتاب چترباز صفر شده و چترباز با تندی حدی به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به زمین برسد.

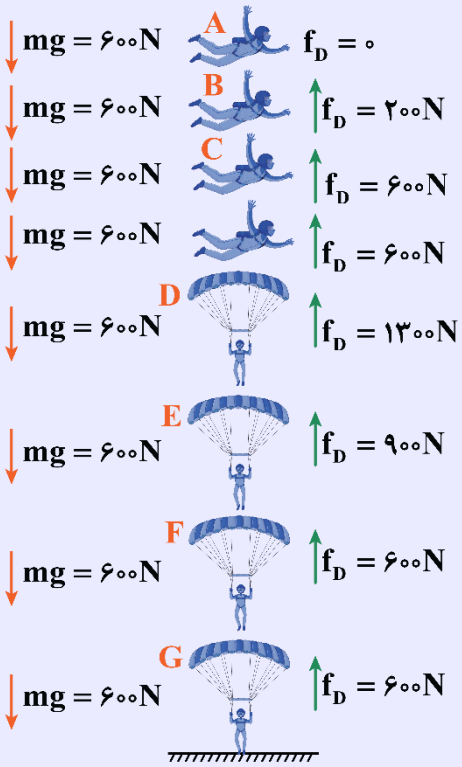
مسیر AC: حرکت تندشونده $\Leftarrow f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

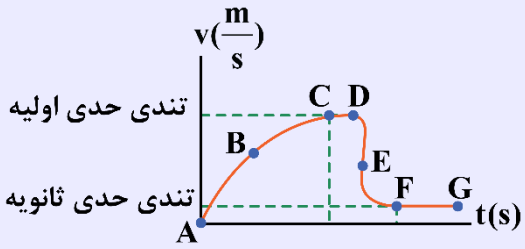
مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ب) چترباز مدتی پس از پرش، چترش را باز می‌کند:

در این حالت پس از پرش، تندی چترباز زیاد و زیادتر می‌شود و نیروی مقاومت هوا در تندی خیلی زیاد با وزن هم‌اندازه می‌شود (تندی حدی اولیه). پس از بازکردن چتر، ناگهان نیروی مقاومت هوا به‌علت افزایش مساحت در آن تندی زیاد، به‌شدت افزایش می‌یابد و حرکت چترباز کند خواهد شد و نیروی مقاومت هوا آن‌قدر کاهش پیدا می‌کند تا با نیروی وزن هم‌اندازه شود. در این حالت، به تندی حدی ثانویه می‌رسد.





مسیر AC: حرکت تندشونده ⇐ $f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

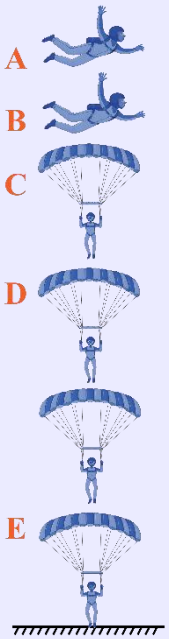
مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی اولیه) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

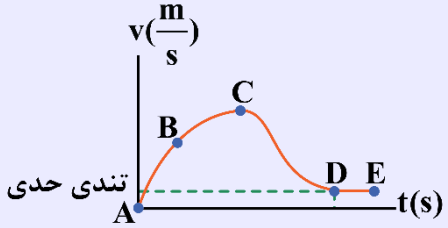
موقعیت D: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر DF: حرکت کندشونده ⇐ $f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر FG: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی ثانویه) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

پ) اگر چترباز قبل از رسیدن به تندی حدی اولیه چترش را باز کند:





مسیر AC: حرکت تندشونده ⇐ $f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

موقعیت C: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر CD: حرکت کندشونده ⇐ $f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر DE: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۱- شخصی به جرم $80kg$ بر روی یک ترازوی فنری درون آسانسور ایستاده است. اگر آسانسور ساکن باشد، ترازو عدد F_1 و اگر آسانسور با شتاب $1/2\frac{m}{s^2}$ به سمت بالا شروع به حرکت کند، ترازو عدد F_2 را نشان می‌دهد. اختلاف عدد ترازو در این دو حالت چند نیوتون است؟ $(g=9/8\frac{m}{s^2})$

۱) ۹۶ ۲) ۱۹۲ ۳) ۷۸۴ ۴) ۸۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

اگر آسانسور ساکن باشد، عدد ترازو برابر است با:

$$F_{N_1}=mg$$

گام دوم

اگر ترازو با شتاب a به‌صورت تندشونده به سمت بالا حرکت کند، عدد ترازو برابر است با:

$$F_{N_2}=m(g+a)$$

گام آخر

بنابراین اختلاف عدد ترازو در این دو حالت برابر است با:

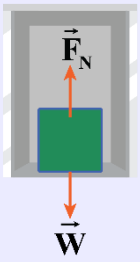
$$F_{N_2}-F_{N_1}=m(g+a)-mg=ma\Rightarrow F_{N_2}-F_{N_1}=80\times 1/2=96N$$

راهنمای مسیرت

توی این سؤال دونستن عدد شتاب گرانشی بهت هیچ کمکی نمی‌کنه، چون درنهایت اختلاف دو عدد ترازو برابر ma شد. احتمالاً اگه عدد ترازو رو توی دو تا حالت به‌دست آورده باشی، ازت یه‌ذره بیش‌تر زمان گرفته به نسبت پاسخ ما.

آسانسور

۱- در شکل زیر، نیروهای وارد بر جسمی که بر کف آسانسور قرار گرفته را نشان می‌دهد که به F_N نیروی عمودی تکیه‌گاه یا وزن ظاهری می‌گویند.



۲- هنگامی‌که شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا باشد، داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_N-W=ma\Rightarrow F_N=mg+ma=m(g+a)$$

۳- هنگامی‌که شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین باشد، داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow W-F_N=ma\Rightarrow F_N=mg-ma=m(g-a)$$

پس به‌طور کلی می‌توان گفت که:

$$F_N=W\pm ma\Rightarrow F_N=m(g\pm|a|)$$

(+): شتاب به سمت بالا (−): شتاب به سمت پایین

سنجش کلاد www.SanjeshCloud.ir T.me/SanjeshCloud

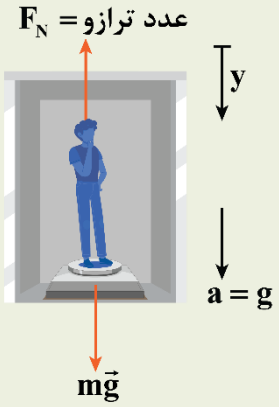
آزمون سراسری تجربی تیرماه خارج از کشور ۱۴۰۳

۵۴- شخصی درون آسانسوری ساکن، روی یک ترازوی فنری ایستاده است و در این حالت ترازو عدد $۶۰۰\,N$ را نشان می‌دهد. اگر آسانسور با شتاب رو به بالای $۲\frac{m}{s^۲}$ درحال حرکت باشد و کابل آسانسور پاره شود و آسانسور سقوط آزاد کند، عددی که ترازو نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) صفر ۲) ۳۸۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۲۰

پاسخ تشریحی:

شکل شخص را هنگام سقوط آزاد رسم می‌کنیم. جهت محور y را به سمت پایین درنظر می‌گیریم.



قانون دوم نیوتون: $F_{net}=ma$

$$\Rightarrow mg-F_N=mg\Rightarrow F_N=۰$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

ماز

۵۲- **در شکل نشان‌داده‌شده، شخص با نیروی ۲۰۰N جسم ۹۰ کیلوگرمی را هُل می‌دهد، اما جسم ساکن می‌ماند. ولی وقتی با نیروی ۳۰۰N جسم را هُل می‌دهد، جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد. به‌ترتیب از راست به چپ، نیروی اصطکاک واردشده بر جسم در حالت‌های اول و دوم چند نیوتون بوده و ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح، چقدر می‌تواند باشد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$**

۱) ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۴
۲) بزرگ‌تر از ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۲
۳) ۲۰۰، ۳۰۰، ۰/۲۵
۴) ۳۰۰، ۳۰۰، ۰/۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

حالت اول

جسم را با نیروی افقی ۲۰۰ نیوتونی هُل می‌دهیم و جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین نیروی اصطکاک از نوع ایستایی بوده و برابر ۲۰۰N است.

$$F_{net_x}=m\cancelto{۰}{a}\Rightarrow F-f_s=۰\Rightarrow f_s=F=۲۰۰N$$

حالت دوم

جسم را با نیروی ۳۰۰ نیوتونی هُل می‌دهیم و جسم در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد؛ بنابراین جسم همچنان ساکن بوده و نیروی اصطکاک برابر ۳۰۰N است.

آستانهٔ حرکت: $F_{net_x}=۰\Rightarrow f_{s,max}=F=۳۰۰N$

بنابراین ضریب اصطکاک ایستایی برابر است با:

$$f_{s,max}=\mu_s F_N \xrightarrow{F_N=mg=۹۰۰N} ۳۰۰=\mu_s\times ۹۰۰\Rightarrow \mu_s=\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$$

از طرفی می‌دانیم ضریب اصطکاک جنبشی کوچک‌تر یا مساوی ضریب اصطکاک ایستایی است $(\mu_k\le\mu_s)$؛ بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\mu_s=۰/۳۳\Rightarrow \mu_k\le ۰/۳۳$$

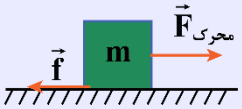
سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

راهنمای زرنگ‌بازی

بعد از محاسبهٔ نیروی اصطکاک هر دو حالت، بین گزینهٔ «۱» و «۳» می‌مونید. کافیه بدونید $\mu_k \leq \mu_s$ تا عدد کم‌تره یعنی ۰/۲۵ رو قبول کنید بدون نیاز به محاسبهٔ μ_s!

حرکت روی سطح دارای اصطکاک

اگر مانند شکل مقابل، نیروی خالص محرکی به جسم ساکن اِعمال شود:



۱- ابتدا مقدار $F_{محرک}$ را به‌دست می‌آوریم که مساوی با برایند نیروهای در راستای حرکت به‌جز خود اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,max}$ را از رابطهٔ $f_{s,max} = \mu_s F_N$ به‌دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحلهٔ قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $F_{محرک} < f_{s,max}$ ⇐ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_s = F_{محرک}$

ب) اگر $F_{محرک} = f_{s,max}$ ⇐ جسم در آستانهٔ حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_{s,max} = \mu_s F_N = F_{محرک}$

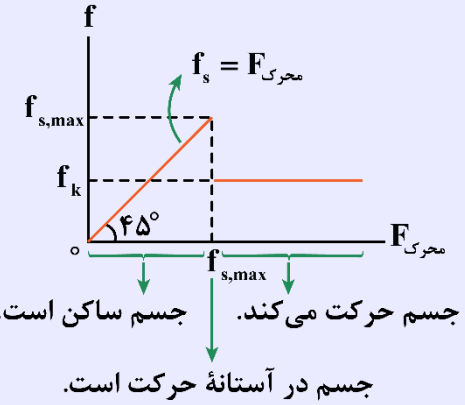
پ) اگر $F_{محرک} > f_{s,max}$ ⇐ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_k = \mu_k F_N$

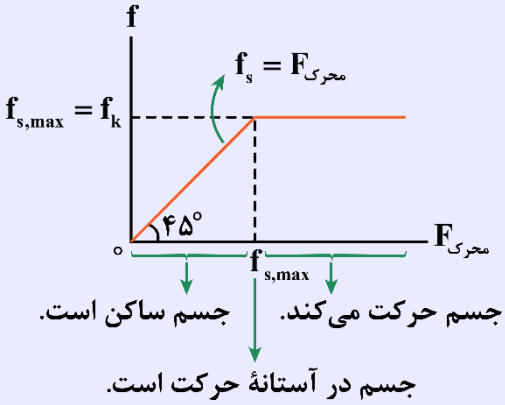
در روابط بالا μ_s و μ_k را به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح در تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره:

$\mu_s \geq \mu_k$ و $f_{s,max} \geq f_k$

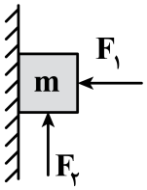
اگر $\mu_s > \mu_k$ باشد:



اگر $\mu_s = \mu_k$ باشد:



۵۳- به جسمی به جرم m، مطابق شکل، دو نیروی F_1 و F_2 وارد می‌کنیم. در این حالت جسم با سرعت ثابت به سمت پایین درحال حرکت است. اگر نیروی F_1 دو برابر شود، پس از این لحظه کدام گزینه صحیح است؟ ($\mu_s > \mu_k$)



۱) جسم با سرعت ثابت به حرکتش ادامه می‌دهد.

۲) جسم با شتابِ رو به بالا، به حرکتش ادامه می‌دهد و بعد از آن متوقف می‌شود.

۳) جسم بعد از مدتی متوقف شده، سپس به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند.

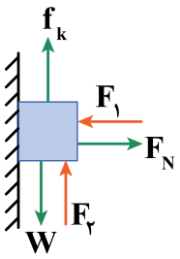
۴) جسم با شتابِ رو به پایین، به حرکتش ادامه می‌دهد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

کلام اول

ابتدا نیروهای وارد به جسم را در حالت اول رسم می‌کنیم:



در این حالت چون سرعت جسم ثابت $(a=0)$ است، طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_1 = F_N \ , \ mg = F_2 + \mu_k F_1$$

همچنین در صورت سؤال ذکر شده که $\mu_s > \mu_k$ است، یعنی:

$$mg < F_2 + \mu_s F_1 \Rightarrow mg - F_2 < \mu_s F_1$$

کلام آخر

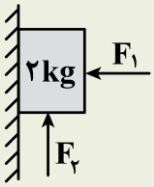
در حالت دوم نیروی F_1 دو برابر می‌شود، یعنی:

$$F_N = 2F_1 \Rightarrow mg < F_2 + \mu_k (2F_1)$$

پس جسم شتاب رو به بالا (هم‌جهت با F_2 و f_k) می‌گیرد که باعث می‌شود سرعت رو به پایین آن کم‌تر و درنهایت صفر شود. همچنین چون $mg - F_2 < \mu_s F_1$ بود، اکنون که F_1 دو برابر شده، حتماً $mg - F_2 < 2\mu_s F_1$ خواهد بود که این به معنی حرکت نکردن جسم به سمت بالا یا پایین پس از رسیدن به حالت سکون است.

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

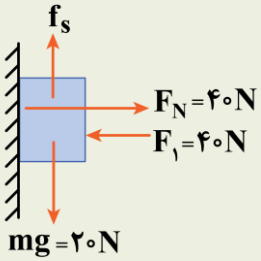
۵۸- مطابق شکل با وارد شدن نیروی افقی $F_1 = 40\,N$، جسم روی دیوار قائم به حالت سکون قرار دارد. اگر نیروی قائم $F_2 = 40\,N$ به جسم وارد شود، کدام مورد درست است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$



۱) جسم ساکن می‌ماند.
۲) جسم رو به بالا شروع به حرکت می‌کند.
۳) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، افزایش می‌یابد.
۴) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، کاهش می‌یابد.

پاسخ تشریحی:

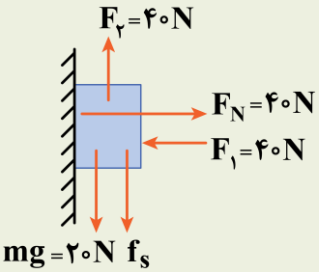
در حالت اول داریم:



$$\text{تعادل قائم}: f_s = mg \Rightarrow f_s = 20N$$

$$f_{s,max} \geq 20N \Rightarrow \text{جسم ساکن است.}$$

در حالت دوم داریم:



$$F_{\text{محرک}} = 20N \leq f_{s,max}$$

(جسم ساکن)

$$\text{تعادل قائم}: f_s + mg = F_2 \Rightarrow f_s = 20N$$

اندازهٔ نیروی محرک (اختلاف دو نیروی $\vec{F}_2$ و نیروی وزن) از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه کم‌تر است؛ بنابراین جسم ساکن می‌ماند و حرکت نمی‌کند.

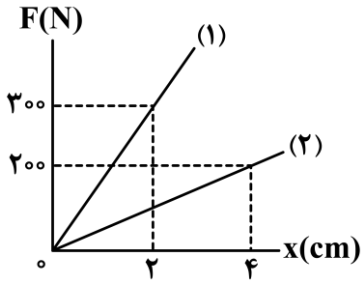
در مقایسهٔ اندازهٔ نیروهای $\vec{F}_N$ و $\vec{f}_s$ در هر دو حالت درمی‌یابیم که بزرگی این نیروها در هر دو حالت یکسان است؛ بنابراین نیروی دیوار بر جسم (R) نیز ثابت می‌ماند.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۴- نمودار زیر، تغییرات نیروی کشسانی دو فنر (۱) و (۲) را برحسب تغییرات طول آن‌ها نشان می‌دهد. اگر این دو فنر را از سقف آویزان کرده و به هرکدام یک وزنهٔ مشابه ببندیم، تغییرات طول فنر (۱) چند برابر فنر (۲) خواهد بود؟



۱) ۳

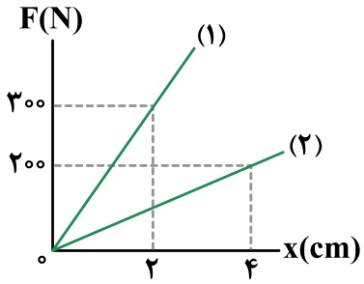
۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ نموداری ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

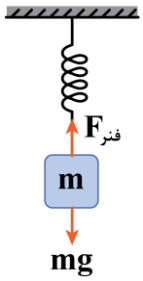
کام اول



ابتدا ثابت فنر برای هریک از آن‌ها را به کمک شیب نمودار به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} k_۱ = (۱)\text{ شیب نمودار} = \frac{۳۰۰}{۲} = ۱۵۰\frac{N}{cm} \\ k_۲ = (۲)\text{ شیب نمودار} = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰\frac{N}{cm} \end{cases}$$

کام دوم



حال اگر یک وزنهٔ مشابه از هرکدام از آن‌ها آویزان کنیم، در حالت تعادل می‌توان نوشت:

$$F_{net} = ۰ \Rightarrow F_{فنر} = mg \Rightarrow k\Delta L = mg$$

کام آخر

سپس برای مقایسهٔ دو حالت می‌توان نوشت:

$$\frac{k_۲}{k_۱} \times \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_۱} = \frac{mg}{mg} = ۱ \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۵۰} \times \frac{\Delta L_۲}{\Delta L_۱} = ۱ \Rightarrow \frac{\Delta L_۱}{\Delta L_۲} = \frac{۱}{۳}$$

سوتی‌های پرتکرار

اگه گزینهٔ «۱» رو زدی احتمالاً توی محاسبات آخر، بی‌دقتی کردی ولی یه نکته داریم که فنر (۱) سخت‌تر از فنر (۲) هست، پس با اعمال نیروی مشابه، تغییر طول کم‌تری داده. اگه این نکته توی ذهنت باشه، حتی اگر با محاسبه هم گزینهٔ (۱) به‌دست بیاری متوجه می‌شی یه جای کار می‌لنگه. فیزیک صرفاً فرمول و محاسبه نیست.

نیروی کشسانی فنر

اگر تغییر طول یک فنر نسبت به حالت آزاد آن را با x نشان دهیم، اندازهٔ نیروی کشسانی در این فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F_e = kx \quad , \quad (x = \ell - \ell_۰)$$

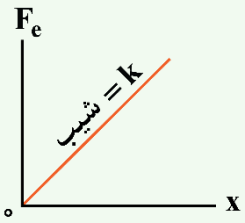
$\ell_۰$: طول آزاد فنر

در این رابطه، k را ضریب ثابت فنر می‌نامیم که به جنس و مشخصات ساختمانی فنر بستگی دارد و یکای آن در SI معادل $\frac{N}{m}$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

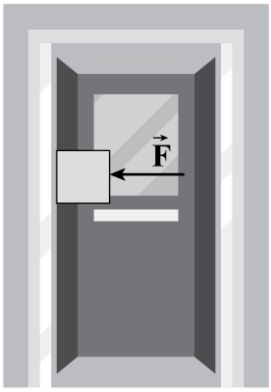
نکته

اگر نمودار نیروی کشسانی فنر برحسب تغییر طول آن را رسم کنیم، یک خط راست گذرنده از مبدأ مختصات خواهد بود که شیب آن معادل همان ثابت فنر است.



ماز

۵۵- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $1kg$ را به دیوارهٔ آسانسوری که با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به‌صورت کندشونده رو به پایین حرکت می‌کند، با نیروی افقی $F=50N$ می‌فشاریم. نیروی F را چند نیوتون کاهش دهیم تا جسم در آستانهٔ لغزش قرار گیرد؟



$(\mu_k=0/4\ ,\ \mu_s=0/5\ ,\ g=10\frac{N}{kg})$

۱) ۲۲

۲) ۲۴

۳) ۲۶

۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

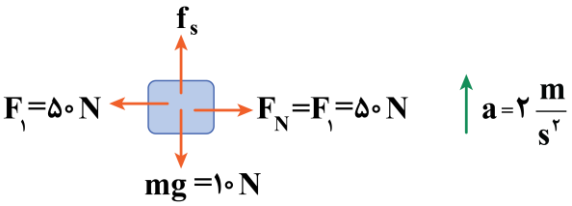
گام اول

جهت شتاب آسانسور و جسم که همراه با آن حرکت می‌کند را به‌دست می‌آوریم:

با توجه به این‌که آسانسور به‌صورت کندشونده حرکت می‌کند، درمی‌یابیم شتاب در خلاف جهت حرکت است و چون آسانسور رو به پایین حرکت می‌کند، شتاب به سمت بالا است.

گام دوم

نیروی اصطکاک وارد بر جسم را حساب می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$F_{net}=ma$$

$$\Rightarrow f_s-mg=ma\Rightarrow f_s-10=1\times 2\Rightarrow f_s=12N$$

گام سوم

برای این‌که در این شرایط جسم در آستانهٔ لغزش باشد، باید $f_{s,max}=12N$ باشد؛ بنابراین نیروی F را در این حالت به‌دست می‌آوریم:

$$f_{s,max}=\mu_s F_N \xrightarrow[F_N=F_2]{\mu_s=0/5} 12=0/5\times F_2\Rightarrow F_2=24N$$

گام آخر

تغییرات نیروی F را به‌دست می‌آوریم:

$$F_2-F_1=24-50=-26N$$

ماز

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۵۶- کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

الف ـ کمیت دماسنجی در دماسنج‌های جیوه‌ای و الکلی، ارتفاع مایع درون لولهٔ دماسنج است.

ب ـ ترموکوپل به‌دلیل گسترهٔ دماسنجی کم‌تر، از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد.

ج ـ تف‌سنج تابشی به‌عنوان یکی از دماسنج‌های معیار پذیرفته شده است.

د ـ در ترموکوپل، کمیت دماسنجی ولتاژ است.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۸۶ ـ ۱۰۰۴)

عبارت‌های «الف» و «د» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

ب) ترموکوپل به‌دلیل **دقت کم‌تر**، از مجموعهٔ دماسنج‌های معیار کنار گذاشته شد. (✗)

ج) تف‌سنج **نوری** به‌عنوان یکی از دماسنج‌های معیار پذیرفته شده است. (✗)

نکات مربوط به دماسنج ترموکوپل

۱- کمیت دماسنجی آن ولتاژ الکتریکی است.

۲- سرعت اندازه‌گیری دما در آن بالا است، زیرا محل اتصال به‌دلیل جرم کم، خیلی سریع با جسمی که دمای آن اندازه‌گیری می‌شود به تعادل گرمایی می‌رسد.

۳- هرچه اختلاف دما بیش‌تر باشد، ولتاژ اندازه‌گیری‌شده هم بیش‌تر خواهد بود.

۴- بسته به جنس فلزهای آن، می‌تواند از $-۲۷۰^\circ C$ تا $۱۳۷۲^\circ C$ را اندازه بگیرد.

۵- حتماً از دو فلز مختلف ساخته می‌شود. به‌عنوان نمونه می‌توان از **مس** و **کنستانتان** در ساختن آن استفاده کرد.

۶- در گذشته به‌عنوان دماسنج معیار درنظر گرفته می‌شد ولی امروزه آن را به‌دلیل دقت کم‌تر از فهرست دماسنج‌های معیار کنار گذاشته‌اند.

ماز

۵۷- **طول خط لولهٔ انتقال فرآورده‌های نفتی بین دو ایستگاه در کم‌ترین دمای آن برابر ۲۵۰km است. اگر اختلاف کم‌ترین طول و بیش‌ترین طول لوله ۱۵۰ متر باشد، اختلاف کمینه و بیشینهٔ دما چند درجهٔ فارنهایت است؟ (جنس لوله‌ها از فولاد با ضریب انبساط طولی $۱۰^{-۵}K^{-۱}$ است.)**

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۸۹ ـ ۱۰۰۴)

کام اول

اختلاف کمینه و بیشینهٔ دما را برحسب درجهٔ سلسیوس به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta L = L_۱ \alpha \Delta\theta \Rightarrow ۱۵۰ = ۲۵۰ \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{-۵} \times \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = ۶۰^\circ C$$

کام آخر

اختلاف دما را برحسب درجهٔ فارنهایت به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta F = ۱/۸ \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta = ۶۰^\circ C} \Delta F = ۱/۸ \times ۶۰ = ۱۰۸^\circ F$$

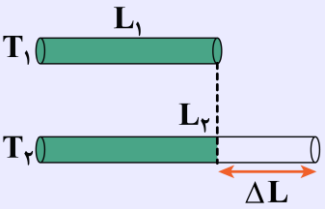
سوتی‌های پرتکرار

اگه گزینهٔ «۲» رو زدی یکم عجله کردی چون اختلاف دما رو برحسب فارنهایت می‌خواد و نه سلسیوس!

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

انبساط طولی (خطی)

اگر دمای یک میله را به‌اندازهٔ ΔT تغییر دهیم، تغییر طول میله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \Rightarrow L_2 = L_1(1+\alpha \Delta T)$$

در این رابطه باید یکای L_1، L_2 و ΔL در دو طرف معادله باهم سازگار باشند.

α ضریب انبساط طولی است که یکای آن $\frac{1}{^\circ C}$ یا $\frac{1}{K}$ است.

ضریب انبساط طولی (خطی) جسم جامد:

افزایش طول بر واحد طولِ یک جسم جامد به‌ازای یک کلوین (یک درجهٔ سلسیوس) افزایش دما است و آن را با α نشان می‌دهند.

عوامل مؤثر بر انبساط طولی:

۱- هرچه طول اولیهٔ میله بلندتر باشد، به‌ازای یک تغییر دمای مشخص، افزایش طول آن بیش‌تر خواهد بود.

۲- هرچه تغییر دمای میلهٔ فلزی بیش‌تر باشد، افزایش طول آن بیش‌تر است.

۳- اگر دمای دو میلهٔ هم‌اندازه که جنس‌های آن‌ها باهم متفاوت است را به یک اندازه افزایش دهیم، میزان افزایش طول آن‌ها متفاوت خواهد بود.

عوامل مؤثر بر ضریب انبساط طولی:

۱- جنس ماده

۲- دما (به‌دلیل وابستگی کم ضریب انبساط طولی به دما در محاسبات معمولی، این اثر نادیده گرفته می‌شود).

در سؤالات مربوط به انبساط طولی، سه چیز ممکن است پرسیده شود:

الف) طول جسم چند برابر شده است؟

$$L_2 = L_1(1+\alpha \Delta\theta) \Rightarrow \text{چند برابرشدن طول جسم}: \frac{L_2}{L_1} = 1+\alpha \Delta\theta$$

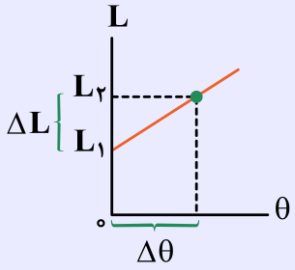
ب) طول جسم چقدر تغییر کرده است؟

$$\text{تغییر طول جسم}: \Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta$$

پ) طول جسم چند درصد تغییر کرده است؟

$$\text{درصد تغییر طول جسم}: \frac{\Delta L}{L_1} \times \underbrace{(100)}_{\text{تبدیل به درصد}} = \frac{L_1 \alpha \Delta\theta}{L_1} \times (100) \Rightarrow \text{درصد تغییر طول جسم} = \alpha \Delta\theta \times (100)$$

نمودار تغییرات طول جسم برحسب دما مطابق شکل زیر است:



$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow \text{شیب نمودار} = \frac{\Delta L}{\Delta\theta} = L_1 \alpha$$

بنابراین شیب نمودار طول برحسب دما برابر $L_1 \alpha$ است که هم به جنس جسم و هم به طول اولیهٔ آن وابسته است.

یه نمونهٔ باحال

طول یک میلهٔ آلومینیمی در دمای $8^\circ C$ برابر ۶ سانتی‌متر است. طول این میله در دمای $133^\circ C$ چند سانتی‌متر می‌شود؟ (ضریب انبساط خطی آلومینیم را برابر $2\times10^{-5}\ \frac{1}{K}$ درنظر بگیرید.)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ تشریحی:

ابتدا تغییر طول میلهٔ آلومینیم را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta\theta = ۲\times۱۰^{-۵}\times۶\times(۱۳۳-۸) = ۰/۰۱۵\text{cm}$$

سپس با استفاده از طول اولیه و تغییر طول به‌دست‌آمده طول ثانویهٔ میله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta L = L_۲ - L_۱ \Rightarrow ۰/۰۱۵ = L_۲ - ۶ \Rightarrow L_۲ = ۶/۰۱۵\text{cm}$$

تمرین

۱- طول یک پل معلق در پایین‌ترین دمای منطقه‌ای ۱۲۰۰ متر است. این پل از نوعی فولاد با $\alpha = ۱۳\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ\text{C}}$ ساخته شده است. فرض کنید کم‌ترین دمای ممکن -۵۰°C و بیش‌ترین دمای ممکن ۵۰°C باشد. بیش‌ترین تغییر طول ممکن پل چند متر است؟

۲- تغییر طول به‌دست‌آمده مقدار نسبتاً زیادی است. درنتیجه در عمل نمی‌توان فضایی خالی به این طول ایجاد کرد، برای رفع این مشکل از ..... استفاده می‌شود که از جنس ..... است.

پاسخ تشریحی:

۱-

$$\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta L = ۱۲۰۰\times۱۳\times۱۰^{-۶}\times\overbrace{(۵۰-(-۵۰))}^{۱۰۰} = ۱/۵۶\text{m}$$

۲- برای رفع این مشکل از **بست انبساطی انگشتی** که از جنس **فلز** است استفاده می‌شود.

یه نمونهٔ باحال

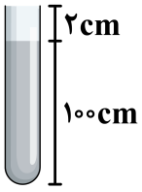
یک تیرآهن دراثر افزایش دمای ۵۰°C، ۰/۰۶ درصد به طولش اضافه می‌شود. ضریب انبساط طولی این تیرآهن در SI کدام است؟

پاسخ تشریحی:

طول میله را صد متر فرض می‌کنیم. طبق مفهوم درصد، به‌ازای هر ۱۰۰ متر، طول ۰/۰۶ متر افزایش می‌یابد.

$$\Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \Rightarrow ۰/۰۶ = ۱۰۰\times\alpha\times۵۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۶\times۱۰^{-۲}}{۵\times۱۰^{+۳}} = ۱/۲\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{\text{K}}$$

۵۸- مطابق شکل، درون یک لولهٔ شیشه‌ای تا ارتفاع ۱۰۰cm گلیسیرین ریخته‌ایم. اگر دمای لوله را ۹۰°F افزایش دهیم، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ ($\beta_{\text{گلیسیرین}} = ۵\times۱۰^{-۴}\frac{۱}{\text{K}}$، $\alpha_{\text{شیشه}} = ۱۰^{-۵}\frac{۱}{\text{K}}$، مساحت مقطع لوله $= ۱\text{cm}^۲$ و از اتلاف انرژی گرمایی چشم‌پوشی کنید.)



۱) $۲/۵\text{cm}^۳$ گلیسیرین از لوله بیرون می‌ریزد.

۲) $۰/۳۴۷\text{cm}^۳$ گلیسیرین از لوله بیرون می‌ریزد.

۳) گلیسیرین در لوله در آستانهٔ سرریز شدن قرار می‌گیرد.

۴) $۰/۵\text{cm}^۳$ از حجم لوله خالی می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۹۴ ـ ۱۰۰۴)

کام اول

ابتدا حجم اولیهٔ لوله، گلیسیرین داخل لوله و همچنین حجم خالی لوله را به‌دست می‌آوریم:

$$V_{۱,\text{لوله}} = A\times h_{\text{لوله}} = ۱\times۱۰۲ = ۱۰۲\text{cm}^۳$$

$$V_{۱,\text{گلیسیرین}} = A\times h_{\text{گلیسیرین}} = ۱\times۱۰۰ = ۱۰۰\text{cm}^۳$$

$$V_{\text{لولهٔ خالی}} = A\times h_{\text{خالی}} = ۱\times۲ = ۲\text{cm}^۳$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

گام دوم

حال مقدار افزایش دما را به کلوین تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta F = ۱/۸\Delta T \xrightarrow{\Delta F = ۹۰^\circ F} \Delta T = \frac{۹۰}{۱/۸} = ۵۰K$$

گام سوم

تغییر حجم لوله و گلیسیرین را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V_{\text{لوله}} = V_{۱,\text{لوله}} \times ۳\alpha_{\text{لوله}} \times \Delta T = ۱۰۲ \times ۳ \times ۱۰^{-۵} \times ۵۰ = ۰/۱۵۳cm^۳$$

$$\Delta V_{\text{گلیسیرین}} = V_{۱,\text{گلیسیرین}} \times \beta_{\text{گلیسیرین}} \times \Delta T = ۱۰۰ \times ۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۵۰ = ۲/۵cm^۳$$

گام آخر

تغییر حجم گلیسیرین بیش‌تر از مجموع تغییر حجم لوله و فضای خالی اولیهٔ آن است:

$$\Delta V_{\text{گلیسیرین}} - \Delta V_{\text{لوله}} - V_{\text{لولهٔ خالی}} = ۲/۵ - ۲ - ۰/۱۵۳ = ۰/۳۴۷cm^۳$$

بنابراین $۰/۳۴۷cm^۳$ گلیسیرین از لوله بیرون می‌ریزد.

انبساط مایع

بیش‌تر مایع‌ها نیز مانند جامدات با افزایش دما منبسط می‌شوند. انبساط مایع‌ها نیز به جنس مایع بستگی دارد اما چون ظرف محتوی مایع نیز انبساط می‌یابد، آنچه از انبساط مایع‌ها دیده می‌شود، انبساط ظاهری آن‌ها است.

تذکر

اگر در یک شیشه مانند شکل بالا، مقداری مایع وجود داشته باشد و به ظرف گرما دهیم، در چند ثانیهٔ اول مشاهده می‌شود که سطح مایع درون لوله پایین آمده و پس از مدتی شروع به بالارفتن می‌کند. علت این امر این است که شیشه، رسانای گرمای ضعیفی است؛ بنابراین ابتدا ظرف شیشه‌ای منبسط شده و حجم ظرف افزایش می‌یابد و سطح مایع که هنوز شروع به انبساط نکرده است، پایین می‌آید. با گذشت زمان، گرما به مایع می‌رسد و مایع منبسط می‌شود و در لوله از سطح اولیه هم بالاتر می‌رود. این موضوع نشان می‌دهد که ضریب انبساط حجمی مایع‌ها بیش‌تر از ضریب انبساط حجمی جامدها است.

برای محاسبهٔ حجم مایع سرریزشده، کافی است حجم نهایی مایع و ظرف را از هم کم کنیم:

حجم مایع سرریزشده: $\Delta V_{\text{سرریز}} = V_{۲\,\text{مایع}} - V_{۲\,\text{ظرف}}$

در مورد وضعیت مایع درون ظرف، ۳ حالت امکان‌پذیر است:

۱- $V_{۲\,\text{ظرف}} > V_{۲\,\text{مایع}}$ ← مایع سرریز می‌شود.

۲- $V_{۲\,\text{ظرف}} = V_{۲\,\text{مایع}}$ ← ظرف به‌طور کامل پر از مایع شده و مایع سرریز نمی‌شود.

۳- $V_{۲\,\text{ظرف}} < V_{۲\,\text{مایع}}$ ← ظرف سرخالی مانده (پر نشده است).

در حالتی که در ابتدا ظرف به‌طور کامل از مایع پر شده است، چون حجم اولیهٔ ظرف و مایع برابر است، حجم مایع سرریزشده را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$\Delta V_{\text{سرریز}} = \Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} \Rightarrow \Delta V_{\text{سرریز}} = V_۱(\beta_{\text{مایع}} - ۳\alpha_{\text{ظرف}})\Delta T$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

یه نمونهٔ باحال

ظرفی به حجم ۲L کاملاً لبریز از الکل است. دمای مجموعه را ۵۰°C بالا می‌بریم. چند میلی‌لیتر الکل از ظرف بیرون می‌ریزد؟ (ضریب انبساط طولی ظرف و ضریب انبساط حجمی الکل به‌ترتیب 10^{-5} و 10^{-4} واحد SI است.)

پاسخ تشریحی:

دراثر افزایش دما، هم حجم الکل و هم حجم ظرف زیاد می‌شود؛ بنابراین کافی است افزایش حجم هر دو را محاسبه کنیم. اختلاف این دو مقدار برابر حجم الکل بیرون‌ریخته است.

$$\Delta V_{\text{الکل}} = V_1\beta\Delta\theta = 2\times10^{-4}\times50 = 0/01\,L = 10\,mL$$

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = V_1(3\alpha)\Delta\theta = 2\times3\times10^{-5}\times50 = 0/003\,L = 3\,mL$$

$$\Rightarrow \text{حجم الکل بیرون‌ریخته} = 10-3 = 7\,mL$$

۵۹- در دستگاه‌های گرم‌کننده و خنک‌کننده، معمولاً از ..... استفاده می‌کنند؛ زیرا ..... دارد.

۱) آب ـ چگالی بالایی ۲) روغن ـ چگالی بالایی ۳) آب ـ گرمای ویژهٔ بالایی ۴) روغن ـ گرمای ویژهٔ بالایی

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ حفظی/مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹۹ ـ ۱۰۰۴)

طبق متن کتاب درسی، در دستگاه‌های گرم‌کننده و خنک‌کننده معمولاً از **آب** استفاده می‌کنند؛ زیرا **گرمای ویژهٔ بالایی** دارد.

۶۰- یک قطعه مس با جرم ۵۰g و دمای ۸۱°C را در ظرف عایقی که حاوی ۱۰۰g آب با دمای ۱۵°C است، می‌اندازیم. دمای تعادل چند درجهٔ سلسیوس می‌شود؟ $(c_{\text{آب}} = 4200\frac{J}{kg.K}\ ,\ c_{\text{مس}} = 400\frac{J}{kg.K})$

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۱ ـ ۱۰۰۴)

چون سیستم به تعادل گرمایی رسیده و با توجه به قانون پایستگی انرژی، مجموع گرمای مبادله‌شده برابر با صفر است؛ بنابراین داریم:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{مس}} = 0$$

$$\Rightarrow m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}(\theta_e - \theta_{\text{آب}}) + m_{\text{مس}}c_{\text{مس}}(\theta_e - \theta_{\text{مس}}) = 0$$

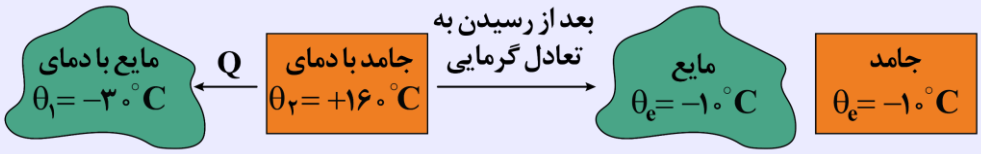
$$\Rightarrow 100\times4200(\theta_e - 15) + 50\times400(\theta_e - 81) = 0$$

$$\Rightarrow 42(\theta_e - 15) + 2(\theta_e - 81) = 0$$

$$\Rightarrow 44\theta_e = 630 + 162 = 792 \Rightarrow \theta_e = \frac{792}{44} = 18°C$$

تعادل گرمایی

اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف در تماس با یکدیگر قرار گیرند، پس از مدتی هم‌دما می‌شوند؛ یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد. به این دما، دمای تعادل می‌گویند.



۲- بعد از تعادل گرمایی، گرمای خالصی بین دو جسم مبادله نمی‌شود.

۱- قبل از تعادل گرمایی، گرما از جسم گرم‌تر به جسم سردتر منتقل می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بنابر قانون پایستگی انرژی، همان‌قدر که اجسام گرم انرژی از دست می‌دهند، اجسام سرد انرژی می‌گیرند، پس جمع جبری این Qها صفر می‌شود:

$$Q_۱ + Q_۲ + \cdots = ۰$$

روش کلی:

$$|Q_{\text{داده شده}}| = |Q_{\text{گرفته شده}}|$$

۱- اجسامی که دمای آن‌ها بالاتر است گرما از دست می‌دهند، پس علامت گرما برای آن‌ها منفی است $(Q < ۰)$.

۲- اجسامی که دمای آن‌ها پایین‌تر است گرما می‌گیرند، پس علامت گرما برای آن‌ها مثبت است $(Q > ۰)$.

در تعادل گرمایی، گرچه اجسام به دمای یکسان می‌رسند ولی فاز (حالت) آن‌ها ممکن است یکسان نباشد.

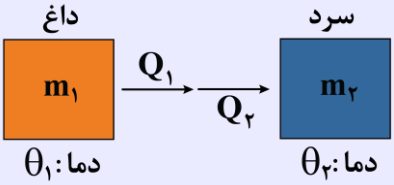
هرچه اختلاف دمای بین دو جسم بیش‌تر باشد، گرما با آهنگ بیش‌تری بین آن‌ها منتقل می‌شود.

تعادل گرمایی بدون تغییر فاز

در این حالت، خبری از ذوب‌شدن، تبخیرشدن و سایر تغییر حالت‌های ماده نیست؛ بنابراین فقط گرماهایی به فرم $Q = mc\Delta\theta$ در این سؤالات وجود دارد و درنتیجه حل‌کردن آن‌ها چندان دشوار نیست.

روش حل مسئله:

مطابق شکل، فرض کنید که دو جسم داغ و سرد در نزدیکی هم قرار دارند تا به تعادل برسند. اگر گرمای مبادله‌شدهٔ هریک از آن‌ها به‌ترتیب $Q_۱$ و $Q_۲$ باشد، مطابق اصل پایستگی انرژی، مجموع این گرماها باید صفر باشد:



$$Q_۱ + Q_۲ = ۰ \Rightarrow m_۱c_۱(\theta - \theta_۱) + m_۲c_۲(\theta - \theta_۲) = ۰$$

اگر تعداد جسم‌ها بیش‌تر شد، کافی است رابطهٔ بالا را تعمیم دهیم.

$$Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ + \cdots = ۰ \Rightarrow m_۱c_۱(\theta - \theta_۱) + m_۲c_۲(\theta - \theta_۲) + m_۳c_۳(\theta - \theta_۳) + \cdots = ۰$$

در رابطهٔ بالا رعایت SI لازم نیست و تنها کافی است که تمام گرماهای مبادله‌شده، جرم‌ها، گرماهای ویژه و دماها، واحدهای یکسان داشته باشند.

یه نمونهٔ باحال

یک قطعهٔ ۱۰۰ گرمی از مس که دمای آن $۹۰^\circ C$ است در ظرفی که حاوی ۲۰۰ گرم آب در دمای $۲۰^\circ C$ است می‌اندازیم، دمای تعادل را حساب کنید. (گرمای ویژهٔ آب و مس به‌ترتیب $۴۲۰۰\frac{J}{kg.K}$ و $۳۸۰\frac{J}{kg.K}$ است و از اتلاف گرما صرف‌نظر شود.)

پاسخ تشریحی:

$$m_۱ = ۱۰۰g = ۰/۱kg \ , \ c_۱ = ۳۸۰\frac{J}{kg.K} \ , \ \theta_۱ = ۹۰^\circ C$$

$$m_۲ = ۲۰۰g = ۰/۲kg \ , \ c_۲ = ۴۲۰۰\frac{J}{kg.K} \ , \ \theta_۲ = ۲۰^\circ C$$

$$Q_۱ = m_۱c_۱(\theta - \theta_۱) \ , \ Q_۲ = m_۲c_۲(\theta - \theta_۲) \Rightarrow Q_۱ + Q_۲ = ۰ \Rightarrow m_۱c_۱(\theta - \theta_۱) + m_۲c_۲(\theta - \theta_۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۰/۱ \times ۳۸۰(\theta - ۹۰) + ۰/۲ \times ۴۲۰۰(\theta - ۲۰) = ۰ \Rightarrow \theta \simeq ۲۳^\circ C$$

یه نمونهٔ باحال

$۲kg$ آب $۲۰^\circ C$ را با $۳kg$ آب $۷۰^\circ C$ مخلوط می‌کنیم. دمای نهایی آب چند درجهٔ سلسیوس می‌شود؟

پاسخ تشریحی:

پایستگی انرژی: $Q_۱ + Q_۲ = ۰ \Rightarrow m_۱c_۱(\theta - \theta_۱) + m_۲c_۲(\theta - \theta_۲) = ۰$

$$\Rightarrow ۲ \times c_{\text{آب}} \times (\theta - ۲۰) + ۳ \times c_{\text{آب}} \times (\theta - ۷۰) = ۰ \Rightarrow ۲\theta - ۴۰ + ۳\theta - ۲۱۰ = ۰ \Rightarrow ۵\theta = ۲۵۰ \Rightarrow \theta = ۵۰^\circ C$$

نتیجه: هنگامی که دو مادهٔ هم‌جنس می‌خواهند به تعادل برسند، گرمای ویژهٔ آن‌ها اهمیت ندارد و در روابط ساده می‌شود.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۲

۷۱- در ظرفی عایق حاوی ۵۲۰ گرم آب $15^\circ C$، یک قطعه مس به جرم $100g$ به دمای $50^\circ C$ و یک قطعه فلز دیگر به دمای $60^\circ C$ می‌اندازیم. پس از برقراری تعادل گرمایی، دمای تعادل به $20^\circ C$ می‌رسد. با چشم‌پوشی از تبادل گرما بین ظرف و سایر اجسام، ظرفیت گرمایی فلز در SI چقدر است؟ ($c_{مس}=400\frac{J}{kg.^\circ C}$ و $c_{آب}=4200\frac{J}{kg.^\circ C}$)

۱) ۱۲۴ ۲) ۲۴۳ ۳) ۲۴۳۰۰۰ ۴) ۱۲۴۰۰۰

پاسخ تشریحی:

با استفاده از پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$$Q_{آب}+Q_{مس}+Q_{فلز}=0$$
$$\Rightarrow m_{آب}c_{آب}\Delta\theta_{آب}+m_{مس}c_{مس}\Delta\theta_{مس}+C_{فلز}\Delta\theta_{فلز}=0$$
$$\Rightarrow 0/52\times4200\times(20-15)+0/1\times400\times(20-50)+C_{فلز}(20-60)=0$$
$$\Rightarrow C_{فلز}=243\frac{J}{K}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکات

۱- اگر چند جسم به جرم‌های m_1، m_2، m_3 و ... و دمای اولیهٔ θ_1، θ_2، θ_3 و ... و گرمای ویژهٔ c_1، c_2، c_3 و ... باهم مخلوط شوند درصورتی‌که تغییر حالت (ذوب، انجماد، میعان و ...) رخ ندهد و از اتلاف گرما صرف‌نظر شود، دمای تعادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta=\frac{m_1c_1\theta_1+m_2c_2\theta_2+m_3c_3\theta_3+\cdots}{m_1c_1+m_2c_2+m_3c_3+\cdots}$$

✓ اگر در حالت فوق، همهٔ اجسام از یک نوع ماده باشند، در این صورت $c_1=c_2=c_3=\cdots$ و درنتیجه دمای تعادل از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\theta=\frac{m_1\theta_1+m_2\theta_2+m_3\theta_3+\cdots}{m_1+m_2+m_3+\cdots}$$

۲- اگر چگالی و حجم مواد، داده شده باشد، با توجه به رابطهٔ $m=\rho V$، دمای تعادل برابر است با:

$$\theta=\frac{\rho_1V_1c_1\theta_1+\rho_2V_2c_2\theta_2+\cdots}{\rho_1V_1c_1+\rho_2V_2c_2+\cdots}$$

✓ درصورتی‌که دو ماده هم‌جنس باشند، ρ و c آن‌ها برابر است؛ بنابراین دمای تعادل از روابط زیر سریع و راحت محاسبه می‌شود:

$$\theta=\frac{V_1\theta_1+V_2\theta_2}{V_1+V_2} \quad \text{یا} \quad \theta=\frac{m_1\theta_1+m_2\theta_2}{m_1+m_2}$$

۳- اگر دو مایع از یک جنس به جرم‌های m_1 و $m_2=km_1$ و یا حجم‌های V_1 و $V_2=kV_1$ با دماهای θ_1 و θ_2 را باهم مخلوط کنیم و تغییرات حجم ناچیز باشد، دمای تعادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta=\frac{\theta_1+k\theta_2}{1+k}$$

یه نمونهٔ باحال

در ظرفی ۵۰۰ گرم آب ۱۰ درجهٔ سلسیوس موجود است. یک قطعه فلز به جرم $1kg$ و دمای $100^\circ C$ را در آن می‌اندازیم. اگر گرمای ویژهٔ فلز و ظرف $300\frac{J}{kg.K}$ و گرمای ویژهٔ آب $4200\frac{J}{kg.K}$ باشد، دمای تعادل را تعیین کنید. (جرم ظرف $2kg$ می‌باشد.)

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ تشریحی:

چون آب از قبل درون ظرف قرار دارد و دمای آب به $۱۰^\circ C$ رسیده است؛ بنابراین آب و ظرف ابتدا در دمای $۱۰^\circ C$ به تعادل رسیده‌اند و $\theta_۱$ ظرف و آب، هر دو $۱۰^\circ C$ است.

$$\theta = \frac{m_۱c_۱\theta_۱ + m_۲c_۲\theta_۲ + m_۳c_۳\theta_۳}{m_۱c_۱ + m_۲c_۲ + m_۳c_۳}$$

$$\theta = \frac{۰/۵\times۴۲۰۰\times۱۰ + ۱\times۳۰۰\times۱۰۰ + ۲\times۳۰۰\times۱۰}{۰/۵\times۴۲۰۰ + ۱\times۳۰۰ + ۲\times۳۰۰} \Rightarrow \theta = ۱۹^\circ C$$

ماز

۶۱- به مقداری یخ صفر درجهٔ سلسیوس گرما می‌دهیم تا تبدیل به آب ۸۰ درجهٔ سلسیوس شود. چند درصد گرمای داده‌شده صرف ذوب یخ شده است؟ $\left(c_{\text{آب}} = ۴/۲\frac{J}{g.K}\ ,\ L_{F\,\text{یخ}} = ۳۳۶\frac{J}{g}\right)$

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۵ ـ ۱۰۰۴)

گرمای لازم برای ذوب یخ از رابطهٔ $Q = mL_F$ و گرمای لازم برای تبدیل آب $۰^\circ C$ به آب $۸۰^\circ C$ از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$ محاسبه می‌شود.

$$\text{درصد گرمایی که صرف ذوب یخ شده است} = \frac{mL_F}{mL_F + mc\Delta\theta}\times۱۰۰$$

$$= \frac{L_F}{L_F + c\Delta\theta}\times۱۰۰ = \frac{۳۳۶}{۳۳۶ + ۴/۲\times۸۰}\times۱۰۰ = ۵۰٪$$

تغییر حالت‌های ماده

موادی که در اطراف ما وجود دارند، معمولاً در سه حالت (فاز) یافت می‌شوند:

۱- جامد **۲- مایع** **۳- گاز (بخار)**

✓ گذار از یک حالت (فاز) به یک حالت (فاز) دیگر را **تغییر حالت** (**گذار فاز**) می‌نامند.

✓ **تغییر حالت** (**گذار فاز**): در طول مدت‌زمان تغییر حالت، دمای جسم ثابت باقی می‌ماند، اما انرژی درونی ماده تغییر می‌کند.

۱- ذوب: تبدیل جامد به مایع را ذوب گویند. ذوب یک فرایند **گرماگیر** است.

جامد :ذوب $\xrightarrow{\text{گرماگیر}}$ مایع $\qquad Q = +mL_F$

m: جرم جسم (kg) $\qquad L_F$: گرمای نهان ذوب $\left(\frac{J}{kg}\right)$

گرمای نهان ذوب (L_F): گرمایی که باید به یک جسم یک کیلوگرمی در نقطهٔ ذوب آن بدهیم تا آن را ذوب کنیم، گرمای نهان ذوب گویند که یکای آن در SI برابر $\frac{J}{kg}$ می‌باشد.

گرمای نهان ذوب به **جنس جسم** بستگی دارد.

تعریف کتاب درسی از گرمای نهان ویژهٔ ذوب: گرمای منتقل‌شده برای تغییر حالت جسم از جامد به مایع یا از مایع به جامد، با جرم جسم نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم جسم را گرمای نهان ویژهٔ ذوب می‌گویند:

$$L_F = \frac{Q}{m}$$

✓ اگر عمل گرمادادن را برای جامدهای خالص و بلورین ادامه دهیم، وقتی دمای جسم به مقدار مشخصی برسد، افزایش دما متوقف می‌شود و دما ثابت باقی می‌ماند. در این حالت، جسم شروع به ذوب‌شدن می‌کند و به مایع تبدیل می‌شود. این دمای ثابت را **نقطهٔ ذوب** یا **دمای گذار جامد به مایع** می‌نامند.

نقطهٔ ذوب به **جنس جسم** و **فشار** وارد بر آن بستگی دارد.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

✓ به‌استثنای چند مورد خاص، حجم جامدهای بلوری هنگام ذوب‌شدن **افزایش** می‌یابد؛ زیرا حجمی که بلور با آرایش منظم مولکول‌ها در حالت جامد اشغال می‌کند، نسبت به این حجم در حالت مایع که آرایش مولکولی نامنظمی دارد، کم‌تر است.

برخلاف جامدهای خالص و بلورین؛ جامدهای بی‌شکل مانند شیشه و جامدهای ناخالصی مانند قیر، نقطهٔ ذوب کاملاً مشخصی ندارند. درواقع وقتی مواد را گرم می‌کنیم پیش از ذوب‌شدن خمیری‌شکل می‌شوند. این مواد در گستره‌ای از دما به‌تدریج ذوب می‌شوند.

✓ معمولاً **افزایش فشار** وارد بر جسم سبب **بالارفتن نقطهٔ ذوب** جسم می‌شود اما در برخی مواد مانند یخ، افزایش فشار به کاهش نقطهٔ ذوب می‌انجامد (که این در مورد یخ بسیار ناچیز است).

✓ عمل ذوب فرایندی گرماگیر است، یعنی به جسم جامدی که به دمای ذوب خود رسیده باشد، باید گرما بدهیم تا به مایع تبدیل شود، زیرا مولکول‌های جامد باید از ساختار صلب قبلی خود رها شوند. این گرما، دمای جسم را تغییر نمی‌دهد؛ بلکه سبب تغییر حالت آن می‌شود. ذوب‌شدن یک قالب یخ و تبدیل آن به آب مثالی مشهور از این دست است.

۲- انجماد: تبدیل مایع به جامد را انجماد گویند. انجماد یک فرایند **گرماده** است.

انجماد: مایع $\xrightarrow{\text{گرماده}}$ جامد $\quad Q=-mL_F$

انجماد یک مایع و تبدیل آن به یک جامد، عکس فرایند ذوب‌شدن است و لازمهٔ این فرایند، گرفتن گرما از مایع است تا مولکول‌ها بتوانند در یک ساختار جدید قرار گیرند. در اینجا نیز تغییر حالت بدون تغییر دما رخ می‌دهد.

✓ وجود ناخالصی در مایع، نقطهٔ انجماد آن را **پایین** می‌آورد.

۳- تبخیر: تبدیل مایع به بخار را تبخیر گویند. تبخیر یک فرایند **گرماگیر** است.

تبخیر: مایع $\xrightarrow{\text{گرماگیر}}$ بخار $\quad Q=+mL_V$

گرمای نهان تبخیر (L_V): گرمایی که باید به یک کیلوگرم مایع بدهیم تا در دمای مشخصی کاملاً بخار شود را گرمای نهان تبخیر در آن دما گویند که یکای آن در SI برابر $\frac{J}{kg}$ می‌باشد.

تعریف کتاب درسی از گرمای نهان ویژهٔ تبخیر: گرمای منتقل‌شده برای تبخیر هر مایع، با جرم آن نسبت مستقیم دارد. نسبت این گرما به جرم مایع بخارشده را گرمای نهان ویژهٔ تبخیر می‌نامیم:

$$L_V=\frac{Q}{m}$$

خشک‌شدن لباس خیسی که روی بند رخت آویخته شده است یا خشک‌شدن سریع یک زمین خیس در هوای گرم تابستان مثال‌هایی از نوعی تبخیر هستند که به آن تبخیر سطحی گفته می‌شود.

تا پیش از رسیدن به نقطهٔ جوش مایع، تبخیر به‌طور پیوسته از سطح مایع رخ می‌دهد.

در پدیدهٔ تبخیر سطحی، تندی برخی از مولکول‌های مایع به حدی می‌رسد که می‌تواند از سطح مایع فرار کنند. تجربه نشان می‌دهد آهنگ رخ‌دادن این فرایند به عواملی ازجمله **دما** و **مساحت سطح مایع** بستگی دارد.

آزمون سراسری تجربی ۱۳۹۸

۷۲- در ظرفی یک قطعه‌یخ صفر درجهٔ سلسیوس وجود دارد. اگر ۸۰۰ گرم آب ۲۰ درجهٔ سلسیوس در ظرف وارد کنیم و فقط بین آب و یخ تبادل گرما صورت گیرد، پس از برقراری تعادل گرمایی، $\frac{۱}{۳}$ جرم قطعه‌یخ در ظرف باقی می‌ماند. جرم اولیهٔ قطعه‌یخ چند گرم بوده است؟

$$(c_{آب}=۴۲۰۰\frac{J}{kg.K} \text{ و } L_F=۳۳۶۰۰۰\frac{J}{kg})$$

۱) ۲۰۰ $\quad$ ۲) $\frac{۸۰۰}{۳}$ $\quad$ ۳) ۳۰۰ $\quad$ ۴) ۶۰۰

پاسخ تشریحی:

$$\frac{۲}{۳}m_{یخ}L_F=۸۰۰\times c_{آب}\times ۲۰ \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳}m_{یخ}}{۸۰۰}=\frac{۲۰c_{آب}}{L_F} \xrightarrow{\frac{L_F}{c_{آب}}=۸۰} \frac{\frac{۲}{۳}m_{یخ}}{۸۰۰}=\frac{۲۰}{۸۰} \Rightarrow m_{یخ}=۳۰۰g$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون سراسری ریاضی خارج از کشور ۱۳۹۹

یک گرمکن با توان گرمایی ثابت در مدت ۱۰ دقیقه، ۱۰۰ گرم یخ صفر درجهٔ سلسیوس را به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کند. این گرمکن همین آب را تقریباً در مدت چند دقیقه به بخار آب ۱۰۰ درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کند؟

$(c_{آب} = ۴/۲\frac{kJ}{kg.K}$ و $L_V = ۲۲۵۶\frac{kJ}{kg}$ ، $L_F = ۳۳۴\frac{kJ}{kg})$

۱) ۲۶ ۲) ۴۰ ۳) ۵۶ ۴) ۸۰

پاسخ تشریحی:

$$Q_۱ = Pt_۱ = mL_F \quad (۱)$$

$$Q_۲ = Pt_۲ = mc\Delta\theta + mL_V \quad (۲)$$

$$\frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{t_۲}{t_۱} \Rightarrow \frac{(۲)}{(۱)} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{c\Delta\theta + L_V}{L_F} \Rightarrow \frac{t_۲}{۱۰\,min} = \frac{۴/۲\times۱۰۰ + ۲۲۵۶}{۳۳۴} = \frac{۲۶۷۶}{۳۳۴} \simeq ۸ \Rightarrow t_۲ \simeq ۸۰\,min$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

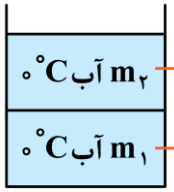
۶۲- در چالهٔ کوچکی ۱۷۰g آب ۰°C قرار دارد. اگر براثر تبخیر سطحی، قسمتی از آب تبخیر شود و بقیهٔ آن یخ ببندد، جرم آب یخ‌زده چند گرم است؟ $(L_F = ۳۳۶\frac{kJ}{kg}, L_V = ۲۵۲۰\frac{kJ}{kg})$

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۰۸ ـ ۱۰۰۴)

گام اول

وقتی قسمتی از آب درون چاله براثر تبخیر سطحی بخار می‌شود، گرمای لازم را از آب باقی‌مانده تأمین می‌کند؛ به همین دلیل، آب باقی‌مانده که دمایش صفر درجهٔ سلسیوس است، با از دست دادن گرما یخ می‌زند.



$$Q_۲ = m_۲L_V = m_۲ \times ۲۵۲۰$$

$$Q_۱ = -m_۱L_F = -m_۱ \times ۳۳۶$$

گام دوم

با توجه به قانون پایستگی انرژی، مجموع گرمای مبادله‌شده صفر است؛ بنابراین داریم:

$$Q_۱ + Q_۲ = ۰ \Rightarrow -۳۳۶m_۱ + ۲۵۲۰m_۲ = ۰ \Rightarrow m_۱ = ۷/۵m_۲$$

گام آخر

از طرفی جرم کل آب درون چاله ۱۷۰g است، پس:

$$m_۱ + m_۲ = ۱۷۰ \xrightarrow{m_۱ = ۷/۵m_۲} ۷/۵m_۲ + m_۲ = ۱۷۰$$

$$\Rightarrow m_۲ = ۲۰g \,,\, m_۱ = ۱۷۰ - ۲۰ = ۱۵۰g$$

۶۳- روش‌های انتقال گرما در کدام گزینه به‌ترتیب همرفت طبیعی، همرفت واداشته و تابش است؟

۱) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن، سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی ساختمان، آب‌شدن برف اطراف کلم اسکانک

۲) انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن، گرم‌شدن آب درون قابلمه، ایجاد تصویر دمانگار

۳) انتقال گرما از سطح خورشید به زمین، سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی ساختمان، ایجاد تصویر در دمانگار

۴) انتقال گرما از سطح خورشید به زمین، گرم‌شدن آب درون قابلمه، آب‌شدن برف اطراف کلم اسکانک

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ حفظی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۱۶ ـ ۱۰۰۴)

در بین موارد داده‌شده، گرم‌شدن آب درون قابلمه و انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن با روش همرفت طبیعی، سیستم گرم‌کنندهٔ مرکزی ساختمان‌ها با روش همرفت واداشته و ایجاد تصویر دمانگار، آب‌شدن برف اطراف کلم اسکانک و انتقال گرما از سطح خورشید به زمین با روش تابش صورت می‌گیرد.

روش‌های انتقال گرما

در این بخش روش‌های انتقال گرما را با کمک طرح‌وارهٔ زیر مرور می‌کنیم:

۶۴- دمای مقداری گاز کامل را از ۲۷°C به ۵۷°C و حجم آن را از ۱۶L به ۲۲L می‌رسانیم. در این فرایند فشار گاز ۱۰cmHg کم می‌شود. فشار اولیهٔ گاز چند سانتی‌متر جیوه بوده است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲۳ ـ ۱۰۰۴)

برای مقدار معینی گاز کامل، نسبت $\frac{PV}{T}$ ثابت می‌ماند، درنتیجه داریم:

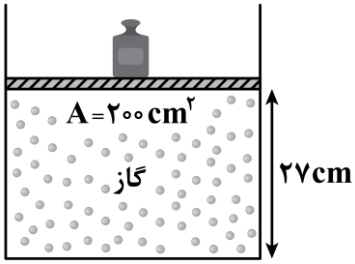
$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\Rightarrow\frac{P_1\times 16}{27+273}=\frac{(P_1-10)\times 22}{57+273}\Rightarrow\frac{8P_1}{300}=\frac{11(P_1-10)}{330}$$

$$\Rightarrow 10(P_1-10)=8P_1\Rightarrow 2P_1=100\Rightarrow P_1=50\,cmHg$$

تذکر!

دقت کنید که در رابطهٔ بالا، حجم و فشار لازم نیست که حتماً برحسب SI نوشته شوند و یکسان بودن یکای آن‌ها کافی است؛ اما برای دما باید حتماً از یکای کلوین استفاده کنیم.

۶۵- **مطابق شکل، گازی کامل درون محفظه‌ای درحال تعادل قرار دارد. اگر وزنه به جرم ۴۰kg را از روی پیستون برداریم، پیستون ۳cm بالا می‌رود تا دوباره به تعادل برسد. وزن پیستون چند نیوتون است؟** ($P_0=10^5 Pa$، $g=10\frac{m}{s^2}$ **و دما ثابت است.)**



۱) ۱۶۰۰
۲) ۱۶۰
۳) ۲۰۰۰
۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۲۳ ـ ۱۰۰۴)

قبل از برداشتن وزنه، داریم:

$$P_1=P_0+\frac{W_{وزنه}+W_{پیستون}}{A}\ ,\ V_1=Ah_1=A\times 27cm$$

بعد از برداشتن وزنه داریم:

$$P_2=P_0+\frac{W_{پیستون}}{A}\ ,\ V_2=Ah_2=A\times 30cm$$

در ادامه قانون گازهای کامل را برای این دو حالت می‌نویسیم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\xrightarrow{\text{دما ثابت}}P_1V_1=P_2V_2$$

$$\Rightarrow(P_0+\frac{W_{وزنه}+W_{پیستون}}{A})\times A\times 27=(P_0+\frac{W_{پیستون}}{A})\times A\times 30$$

$$\Rightarrow(10^5+\frac{400+W_{پیستون}}{200\times10^{-4}})\times 27=(10^5+\frac{W_{پیستون}}{200\times10^{-4}})\times 30$$

$$\Rightarrow 9\times10^5+\frac{3600+9W_{پیستون}}{2\times10^{-2}}=10\times10^5+\frac{10W_{پیستون}}{2\times10^{-2}}$$

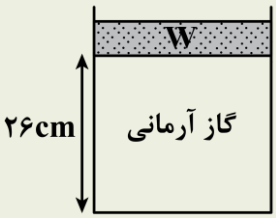
$$\Rightarrow\frac{3600+9W_{پیستون}-10W_{پیستون}}{2\times10^{-2}}=10^5$$

$$\Rightarrow 3600-W_{پیستون}=2000\Rightarrow W_{پیستون}=1600N$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۷۵- مطابق شکل، زیر پیستون آزاد به وزن $W = ۴۰\,N$ گاز آرمانی قرار دارد و فشار هوا $۱۰^۵$ پاسکال است. روی پیستون وزنهٔ ۸۰ نیوتونی قرار می‌دهیم، در دمای ثابت، وزنه ۴cm پایین می‌آید و دوباره به حال تعادل قرار می‌گیرد. سطح قاعدهٔ پیستون چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) ۶۰

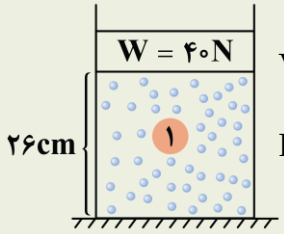
۲) ۴۰

۳) ۳۰

۴) ۲۰

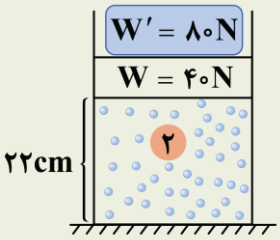
پاسخ تشریحی:

فرض کنیم سطح مقطع پیستون برابر A باشد. با استفاده از قانون گازهای کامل در دمای ثابت می‌توان نوشت:



$$V_۱ = A_۱h_۱ = ۲۶A$$

$$P_۱ = \frac{W}{A} + P_۰ = \frac{۴۰}{A} + ۱۰^۵$$



$$V_۲ = A_۲h_۲ = ۲۲A$$

$$P_۲ = \frac{W + W'}{A} + P_۰ = \frac{۱۲۰}{A} + ۱۰^۵$$

دما ثابت $\Rightarrow P_۱V_۱ = P_۲V_۲$

$$\Rightarrow (\frac{۴۰}{A} + ۱۰^۵) \times ۲۶\cancel{A} = (\frac{۱۲۰}{A} + ۱۰^۵) \times ۲۲\cancel{A}$$

$$\Rightarrow A = ۴۰ \times ۱۰^{-۴}\,m^۲ = ۴۰\,cm^۲$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی ۳: مولکول‌ها در خدمت تندرستی: از ابتدای pH تا پایان فصل
+ آسایش و رفاه در سایه شیمی: از ابتدای فصل تا ابتدای واکنش‌های شیمیایی و سفر هدایت شده الکترون (صفحه‌های ۲۴ تا ۴۴)
شیمی پایه: ردپای گازها در زندگی + آب، آهنگ زندگی: تا انتهای قسمت در میلیون (درصد جرمی، استخراج سدیم کلرید) (صفحه‌های ۷۰ تا ۹۸)

سهم در کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۴ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

۶۶- در محلولی از هیدروبرمیک اسید، درصد جرمی یون برمید ($d = ۱/۲۵\ g.mL^{-۱}$) برابر با ۰/۶۴٪ است. مقدار pH این محلول چقدر بوده و ۲ لیتر از این محلول، با چند گرم پودر لیتیم اکسید واکنش می‌دهد؟ ($Br = ۸۰ , O = ۱۶ , Li = ۷ : g.mol^{-۱}$)

$$Li_۲O(s) + ۲HBr(aq) \rightarrow ۲LiBr(aq) + H_۲O(l)$$

۱) ۶ - ۱/۳ ۲) ۳ - ۱/۳ ۳) ۶ - ۱ ۴) ۳ - ۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت مولی یون برمید در محلول اسیدی

گام دوم: محاسبه مقدار pH محلول اسیدی

گام سوم: به‌دست آوردن جرم لیتیم اکسید مصرف شده در واکنش خنثی‌شدن

هیدرویدیک اسید($HI(aq)$)، هیدروبرمیک اسید($HBr(aq)$)، هیدروکلریک اسید($HCl(aq)$) و سولفوریک اسید($H_۲SO_۴$) اسیدهای قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ هستند؛ بنابراین معادلهٔ یونش آن‌ها در آب یک‌طرفه است. این مواد بر اساس معادلات زیر در آب یونش پیدا می‌کنند:

$$HBr(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Br^-(aq) \qquad HI(aq) \longrightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$$
$$H_۲SO_۴(aq) \longrightarrow H^+(aq) + HSO_۴^-(aq) \qquad HCl(aq) \longrightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

چون هیدروبرمیک اسید، یک اسید قوی است، به‌طور کامل در محلول خود یونش یافته و بر اثر یونش هر ذره از آن، یک یون برمید و یک یون هیدروژن وارد محلول می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت غلظت مولی یون هیدروژن و یون برمید در محلول این ماده با هم برابر است.

با توجه به درصد جرمی یون برمید در محلول، غلظت مولی این یون را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}} = \frac{۱۰ \times a \times d}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow [Br^-] = \frac{۱۰ \times ۰/۶۴ \times ۱/۲۵}{۸۰} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، داریم:

$$[Br^-] = [H^+] = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به غلظت یون H^+ در محلول نهایی، مقدار pH محلول برابر خواهد بود با:

$$pH = -log[H^+] = -log(۱۰^{-۱}) = ۱$$

اکسیدهای اسیدی و بازی

اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. این مواد، از جمله اسیدها و بازهای آرنیوس هستند. به‌طور کلی، اکسیدهای فلزی (مثل سدیم اکسید) را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و بر اساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq) \rightarrow ۲Na^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$CaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ca(OH)_۲(aq) \rightarrow Ca^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$
$$Li_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲LiOH(aq) \rightarrow ۲Li^+(aq) + ۲OH^-(aq)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ... و آلومینیم اکسید، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند. در نقطه مقابل، اکسیدهای نافلزی (مثل گاز SO_3) را اکسیدهای اسیدی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروژن شده و pH محلول را کاهش می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و بر اساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_3(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$
$$CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2CO_3(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq)$$
$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$
$$SO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_3(aq) \rightleftharpoons 2H^+(aq) + SO_3^{2-}(aq)$$

غلظت هیدروبرمیک اسید در محلول، برابر با ۰/۱ مولار بوده و این محلول طبق معادله $Li_2O(s) + 2HBr(aq) \rightarrow 2LiBr(aq) + H_2O(l)$ با لیتیم اکسید واکنش می‌دهد. با توجه به معادله واکنش مورد نظر، جرم لیتیم اکسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,Li_2O = 2\,L\ \text{محلول} \times \frac{0/1\,mol\,HBr}{1\,L\ \text{محلول}} \times \frac{1\,mol\,Li_2O}{2\,mol\,HBr} \times \frac{30\,g\,Li_2O}{1\,mol\,Li_2O} = 3\,g$$

۶۷- در رابطه با واکنش هیدروکلریک اسید با محلول جوش شیرین و فراورده گازی حاصل از آن، کدام مطلب درست است؟

۱) اگر از محلول نیترواسید با غلظت برابر استفاده کنیم، سرعت تولید گاز مورد نظر افزایش می‌یابد.

۲) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از این گاز، نصف شمار پیوندها در اوره است.

۳) با انحلال این گاز در آب خالص، محلول مورد نظر خاصیت بازی ملایمی پیدا خواهد کرد.

۴) اتم‌های سازنده فراورده گازی آن، همانند مولکول H_2O، روی یک خط راست قرار نگرفته‌اند.

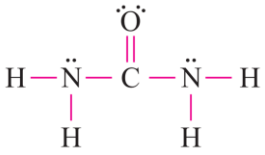
پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

معادله واکنش جوش شیرین با محلول هیدروکلریک اسید(جوهر نمک) به‌صورت زیر است:

$$HCl(aq) + NaHCO_3(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$$

فراورده گازی تولید شده در این واکنش، گاز کربن دی‌اکسید است. ساختار این ماده به‌صورت زیر است:

ساختار مولکول اوره نیز به‌صورت زیر است:



در ساختار گاز کربن دی‌اکسید، ۴ پیوند و در ساختار اوره نیز ۸ پیوند اشتراکی وجود دارد.

جوش شیرین

از آن‌جا که اضافه‌کردن محلول سدیم هیدروژن کربنات به یک محلول دیگر، سبب کاهش غلظت یون هیدروژن در آن محلول می‌شود، می‌توان گفت که محلول سدیم هیدروژن کربنات یک محلول بازی با pH بزرگ‌تر از ۷ است. برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین (یا همان سدیم هیدروژن کربنات) می‌افزایند. اضافه‌کردن این ماده به شوینده‌ها، سبب افزایش خاصیت بازی آن‌ها می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها را افزایش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هیدروکلریک اسید یک اسید قوی است؛ درحالی‌که نیترواسید در دسته اسیدهای ضعیف قرار می‌گیرد. چون ثابت یونش نیترواسید(HNO_2) کمتر از هیدروکلریک اسید است، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت محلول‌ها، غلظت یون هیدروژن در محلول نیترواسید کمتر بوده و بر این اساس، محلول مورد نظر با سرعت کمتری با محلول جوش شیرین واکنش می‌دهد.

۳) در واکنش مورد نظر، گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود که یک اکسید نافلزی با خاصیت اسیدی است. با انحلال این گاز در آب، محلول مورد نظر خاصیت اسیدی ملایمی پیدا می‌کند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۴) چون اتم مرکزی در مولکول کربن دی‌اکسید فاقد جفت الکترون ناپیوندی است، پس اتم‌های سازنده آن روی یک خط راست قرار گرفته‌اند؛ به عبارت دیگر، مولکول مورد نظر ساختار خطی داشته و خمیده نیست. تصویر زیر، نمایی از ساختار این ماده را نشان می‌دهد:

۶۸- مقدار ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سود با غلظت مشخص، ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۱۲ مولار هیدروکلریک اسید و ۸ لیتر آب خالص را در یک ظرف ریخته و با هم مخلوط می‌کنیم. اگر pH مخلوط حاصل از این فرایند برابر با ۲ شود، pH محلول بازی مصرف شده در این فرایند چقدر بوده است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲/۳ ۴) ۱۱/۷

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت مولی یون هیدروژن در محلول نهایی

گام دوم: محاسبه مقدار باز موجود در محلول سدیم هیدروکسید

گام سوم: به‌دست آوردن pH محلول سدیم هیدروکسید مصرف شده

طبق فرض سؤال، مقداری محلول بازی(محلول سود) با مقداری محلول اسیدی(محلول HCl) مخلوط شده و پس از افزودن مقداری آب به این مخلوط، یک محلول اسیدی با $pH = ۲$ به‌دست آمده است. چون محلول نهایی خاصیت اسیدی دارد، پس می‌توان گفت مقداری از اسید موجود در محلول هیدروکلریک اسید، توسط محلول سود خنثی شده و الباقی اسید، در محلول باقیمانده است. در قدم اول، غلظت اسید در محلول نهایی را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲} = ۰/۰۱\ mol.L^{-۱}$$

طی این فرایند، ۸ لیتر آب خالص به همراه ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول سود و ۸۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید مخلوط شده‌اند، پس حجم محلول نهایی برابر با ۹ لیتر است. مقدار مول یون هیدروژن باقیمانده در این محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ H^+ = ۹\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۰۱\ moL\ H^+}{۱\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۹\ mol$$

در قدم بعد، مقدار یون هیدروژن موجود در محلول ۸۰۰ میلی‌لیتری هیدروکلریک اسید را باید محاسبه کنیم. توجه داریم که هیدروکلریک اسید یک اسید قوی است، پس غلظت یون هیدروژن در محلول ۰/۱۲ مولار آن، برابر با ۰/۱۲ مول بر لیتر می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,mol\ H^+ = ۸۰۰\ mL\ \text{محلول} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{۰/۱۲\ moL\ H^+}{۱\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۹۶\ mol$$

واکنش خنثی‌شدن

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن یا همان تیتراسیون گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از اسیدها براساس معادله $OH^-(aq) + H_۳O^+(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند.

در محلول اسیدی اولیه، ۰/۰۹۶ مول یون هیدروژن وجود داشته و از این مقدار، ۰/۰۹ مول در محلول نهایی باقیمانده است. بر این اساس، می‌توان گفت ۰/۰۰۶ مول از یون هیدروژن موجود در محلول اولیه، توسط یون هیدروکسید موجود در محلول سود خنثی شده است. در این رابطه، داریم:

$$\text{یون هیدروژن باقیمانده} = \text{یون هیدروژن در محلول اولیه} - \text{یون هیدروژن خنثی شده} \Rightarrow ۰/۰۹ = ۰/۰۹۶ - x \Rightarrow x = ۰/۰۰۶\ mol$$

در محلول ۲۰۰ میلی‌لیتر سود، مقدار ۰/۰۰۶ مول یون هیدروکسید وجود داشته است. بر این اساس، داریم:

$$[OH^-] = \frac{\text{مول } OH^-}{\text{حجم محلول}} = \frac{۰/۰۰۶\ mol\ OH^-}{۰/۲\ L} = ۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

$$[H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۰۳} \simeq ۳ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$
$$pH = -log(۳ \times ۱۰^{-۱۳}) = ۱۳ - \underbrace{log\ ۳}_{۰/۵} = ۱۲/۵$$

اگر می‌خواستیم pH محلول بازی را با استفاده از مفهوم pOH به‌دست بیاوریم، مقدار pOH این محلول برابر با ۱/۵ می‌شد، پس مقدار pH محلول در این حالت هم ۱۲/۵ به‌دست می‌آمد.

ماز

۶۹- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ یکی از روش‌های تعیین غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌ها، سنجش رسانایی الکتریکی این محلول‌ها است.

ب ـ در آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است.

ج ـ برای خنثی کردن مقداری از محتویات روده، می‌توان به مواد موجود در روده محلولی از سرکه اضافه کرد.

د ـ شیر منیزی، نوعی دارو است که به شکل یک کلوئید عرضه شده و قبل از مصرف باید تکان داده شود.

هـ ـ با انحلال آمونیاک در محلول سود، رسانایی الکتریکی محلول، برخلاف pH آن کاهش خواهد یافت.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۴ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف یکی از روش‌هایی که برای تعیین غلظت یون هیدرونیوم می‌توان به کار برد، سنجش رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی است. با افزایش غلظت این یون در محلول‌های اسیدی، رسانایی الکتریکی محلول مورد نظر افزایش پیدا می‌کند.

غلظت یون هیدروژن

خوراکی‌ها، شوینده‌ها، داروها و مواد آرایشی شامل مقادیر متفاوتی از یون‌ها به ویژه یون هیدرونیوم هستند. این یون، به مقدار فراوان در انواع میوه‌ها از جمله مرکبات نیز یافت می‌شود. غلظت این یون بر روی ماندگاری این مواد و در نتیجه سلامتی تأثیر شایانی دارد. بر این اساس، می‌توان گفت در فرایند تولید مواد گوناگون اغلب تعیین و کنترل غلظت یون هیدرونیوم نقش مهمی دارد.

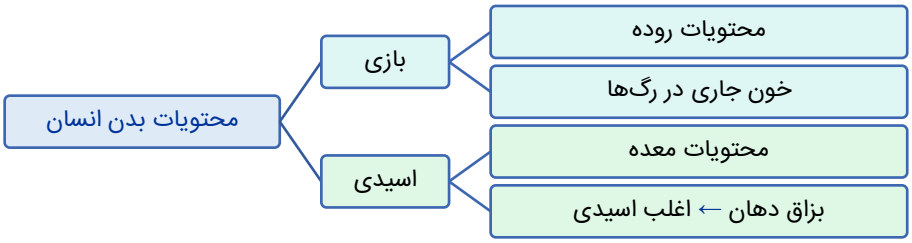
ب چون آب گوجه‌فرنگی و یک نمونه از شیر ترش‌شده، خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کمتر از ۷ است، پس می‌توان گفت در مقداری از آب گوجه‌فرنگی، همانند شیر ترش‌شده، غلظت مولی یون هیدرونیوم بیشتر از یون هیدروکسید است. علاوه بر شیر ترش‌شده و آب گوجه‌فرنگی، آب گازدار و آب مرکبات نیز از جمله سایر محلول‌های اسیدی معرفی شده در کتاب درسی هستند.

شیر ترش‌شده

شیر ترش‌شده، به واسطه حضور لاکتیک اسید، خصلت اسیدی و مزه ترش دارد. همان‌طور که می‌دانیم، با استفاده از این اسید می‌توان یک پلیمر سبز به نام پلی‌لاکتیک اسید تهیه کرد که از دسته پلیمرهای سبز است. پلیمرهای سبز از جمله پلی‌لاکتیک اسید را از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند. به این منظور نخست نشاستهٔ موجود در این مواد را به لاکتیک اسید تبدیل کرده سپس از واکنش پلیمری شدن آن در شرایط مناسب، پلی‌لاکتیک اسید تولید می‌کنند. از پلی‌لاکتیک اسید انواع ظرف‌های پلاستیکی یک‌بار مصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسهٔ پلاستیکی و ... تولید شده و کاربرد آن‌ها رو به گسترش است. این پلاستیک‌ها امکان تبدیل شدن به کود را دارند به همین دلیل ردپای کوچک‌تری در محیط زیست برجای می‌گذارند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

ج) عملکرد بخش‌های مختلف بدن انسان به میزان مواد بازی و اسیدی موجود در قسمت‌های مختلف آن بستگی دارد. چون محتویات روده انسان خاصیت بازی داشته و مقدار pH آن‌ها تقریباً برابر با ۸/۵ است، برای خنثی کردن مقداری از این مواد می‌توان به آن‌ها محلولی از یک ماده اسیدی مثل محلول سرکه (محلول رقیقی از استیک اسید در آب) را اضافه کرد. نمودار زیر، وضعیت اسیدی یا بازی بودن محتویات بدن انسان را نشان می‌دهد:



د) برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی‌کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش‌شیرین) می‌شود. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آن‌جا که ماده موجود در این دارو انحلال‌پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد. در این مخلوط، قطعات کوچکی از منیزیم هیدروکسید در یک محیط آبی قرار گرفته‌اند. جدول زیر، ویژگی‌های سوسپانسیون‌ها، کلوئیدها و محلول‌های همگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذرات ریز ماده و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

هـ) آمونیاک یک باز ضعیف است و با ورود گاز آمونیاک به محلول باز قوی سدیم هیدروکسید، مقدار یون هیدروکسید افزایش یافته و در نتیجه مقدار pH محلول و همچنین رسانایی الکتریکی آن، افزایش پیدا خواهد کرد.

۷۰- اگر pH محلولی از اسید HA با درصد یونش ۷٪، به اندازه ۲/۵ واحد کوچک‌تر از pH محلولی از اسید HB با درصد یونش ۱/۴٪ باشد، نسبت غلظت مولی اسید HA به غلظت مولی اسید HB و ثابت یونش اسید HB در محلولی از آن با غلظت ۱۰/۶ گرم بر لیتر، به‌ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ (جرم مولی اسید HB برابر $53g$ است.)

۱) $3/92 \times 10^{-5}$ — ۵۰
۲) $3/92 \times 10^{-5}$ — ۶۰
۳) $2/88 \times 10^{-4}$ — ۵۰
۴) $2/88 \times 10^{-4}$ — ۶۰

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

طبق فرض سؤال، مقدار pH این دو محلول به اندازه ۲/۵ واحد فرق می‌کند. مقدار pH محلول اسید HA را برابر pH_1 و مقدار pH محلول اسید HB را برابر $(pH_1 + 2/5)$ در نظر می‌گیریم. غلظت یون هیدروژن در هر محلول اسیدی برابر است با:

$$HA: [H_3O^+] = 10^{-pH_1}$$
$$HB: [H_3O^+] = 10^{-(pH_1+2/5)}$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

هر دو اسید، از جمله اسیدهای ضعیف بوده و در رابطه با آن‌ها، داریم:

$$\alpha = \frac{[H_3O^+]}{\text{غلظت مولی اسید}}$$

با توجه به رابطهٔ درجهٔ یونش برای دو اسید HA و HB، می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{HA} = \dfrac{[H_3O^+]}{M_{HA}} \Rightarrow M_{HA} = \dfrac{10^{-pH_1}}{\alpha_{HA}} \\ \alpha_{HB} = \dfrac{[H_3O^+]}{M_{HB}} \Rightarrow M_{HB} = \dfrac{10^{-(pH_1+2/5)}}{\alpha_{HB}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_{HA}}{M_{HB}} = \frac{\frac{10^{-pH_1}}{0/07}}{\frac{10^{-(pH_1+2/5)}}{0/014}} \Rightarrow \frac{M_{HA}}{M_{HB}} = 0/2 \times 10^2 \times 10^{0/5} = 60$$

برای تبدیل غلظت گرم بر لیتر از یک حل‌شونده به غلظت مولی آن ماده، کافی است مقدار غلظت گرم بر لیتر را بر جرم مولی ماده مورد نظر، تقسیم کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی}} \Longrightarrow HB \text{ غلظت مولی} = \frac{10/6}{53} = 0/2\ mol.L^{-1}$$

از آنجا که درصد یونش اسید HB کمتر از ۵٪ است، با استفاده از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$، مقدار ثابت یونش آن را محاسبه می‌کنیم:

$$K_a \simeq M_{HB}\alpha_{HB}^2 = (0/2) \times \left(\frac{1/4}{100}\right)^2 = 0/2 \times 1/96 \times 10^{-4} = 3/92 \times 10^{-5}\ mol.L^{-1}$$

توجه داریم که اگر مقدار درجهٔ یونش کمتر از ۰/۰۵ باشد یا نسبت میان ثابت یونش اسید به غلظت آن کمتر از 2×10^{-3} باشد و یا اینکه در صورت سؤال، طراح ثابت یونش را به‌تقریب خواسته باشد، می‌توان مقدار ثابت یونش اسید را از رابطهٔ $K_a \simeq M\alpha^2$ به دست آورد.

انواع اسیدها

اسیدهای قوی: بر اثر حل شدن در آب، تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند؛ به همین دلیل غلظت هر یک از یون‌ها در محلول اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار، با غلظت اولیهٔ اسید، برابر است و محلول اسیدهای قوی را می‌توان محلولی شامل یون‌های آبپوشیده دانست. از آنجا که اسیدهای قوی در آب تقریباً به‌طور کامل یونش می‌یابند، جزء الکترولیت‌های قوی به شمار می‌روند.

اسیدهای ضعیف: بر اثر حل شدن در آب به‌طور جزئی یونش می‌یابند؛ یعنی بیشتر مولکول‌های اسید در محلول باقی می‌مانند و فقط تعداد کمی از آن‌ها به یون تبدیل می‌شوند؛ بنابراین در محلول اسیدهای ضعیف، علاوه بر یون‌های آبپوشیده، مولکول‌های اسید نیز یافت می‌شوند. حواستان باشد که اسیدهای ضعیف، جزء الکترولیت‌های ضعیف بوده و رسانای ضعیف جریان برق به شمار می‌روند.

۷۱- برای حل کردن ۷/۲۶ گرم اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{14}H_{29}COOH$ که در یک لولهٔ آب رسوب کرده است، به چند میلی‌لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH = 12/3$ نیاز داریم و طی این فرایند، چند گرم آب به‌عنوان فراورده تولید می‌شود؟
$(O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$

۱) ۰/۷۲ – ۱۵۰۰ ۲) ۰/۷۲ – ۷۵۰ ۳) ۰/۵۴ – ۱۵۰۰ ۴) ۰/۵۴ – ۷۵۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: نوشتن معادله واکنش باریم هیدروکسید با اسید چرب

گام دوم: محاسبه جرم مولی اسید چرب مصرف شده

گام سوم: به‌دست آوردن حجم باز مصرف شده و جرم آب تولید شده

به‌طور کلی، بازهای مختلف با اسیدهای چرب واکنش داده و آن‌ها را به صابون و یا مواد شبیه به صابون تبدیل می‌کنند. در این واکنش، آب نیز تولید می‌شود. باریم هیدروکسید، یک باز دو ظرفیتی است. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$2C_{14}H_{29}COOH(s) + Ba(OH)_2(aq) \longrightarrow (C_{14}H_{29}COO)_2Ba(aq) + 2H_2O(l)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

جرم مولی اسید چرب برابر است با:

$$\text{جرم مولی اسید چرب} = (۱۵ \times ۱۲) + (۲ \times ۱۶) + (۳۰ \times ۱) = ۲۴۲\ g.mol^{-۱}$$

ابتدا غلظت محلول $Ba(OH)_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-۱۲/۳} = ۱۰^{-۱۳} \times ۱۰^{۰/۷} = ۵ \times ۱۰^{-۱۳} mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۵ \times ۱۰^{-۱۳}} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = M \times \alpha \times n = M \times ۱ \times ۲ \Longrightarrow M = \frac{۰/۰۲}{۲} = ۰/۰۱\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به محاسبات بالا، غلظت باریم هیدروکسید در محلول مصرف شده از آن برابر با ۰/۰۱ مول بر لیتر است. در نهایت حجم محلول بازی مورد نیاز و جرم آب تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{محلول } ۱۵۰۰\ mL = \frac{۱۰^۳\ mL}{۱\ L} \times \frac{۱\ L \text{ محلول}}{۰/۰۱\ mol\ Ba(OH)_۲} \times \frac{۱\ mol \text{ اسیدچرب}}{۲\ mol \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱\ mol\ Ba(OH)_۲}{۲۴۲\ g \text{ اسیدچرب}} \times ۷/۲۶\ g \text{ اسیدچرب} = ?\ mL \text{ محلول}$$

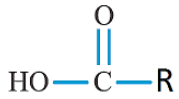
$$? g\ H_۲O = ۷/۲۶\ g \text{ اسیدچرب} \times \frac{۱\ mol \text{ اسیدچرب}}{۲۴۲\ g \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۲\ mol\ H_۲O}{۲\ mol \text{ اسیدچرب}} \times \frac{۱۸\ g\ H_۲O}{۱\ mol\ H_۲O} = ۰/۵۴\ g$$

۷۲- بوتانوئیک اسید، در مقایسه با استیک اسید، انحلال‌پذیری ..... در آب داشته و در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، مقدار pH محلول این ماده در مقایسه با محلول استیک اسید، ..... است.

۱) بیشتری ـ بیشتر ۲) بیشتری ـ کمتر ۳) کمتری ـ بیشتر ۴) کمتری ـ کمتر

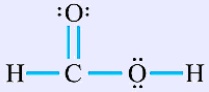
پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

کربوکسیلیک اسیدها، انواعی از اسیدهای ضعیف بوده و K_a کوچکی دارند. از آنجا که قدرت اسیدی فورمیک اسید در مقایسه با استیک اسید بیشتر است، پس می‌توان گفت که با افزایش تعداد اتم‌های کربن موجود در ساختار این مواد، قدرت اسیدی آن‌ها کاهش پیدا می‌کند. ساختار گروه عاملی موجود در کربوکسیلیک اسیدها به‌صورت زیر است:

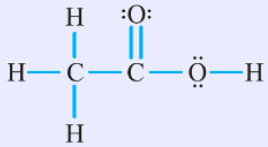


اعضای خانواده کربوکسیلیک اسیدها

کربوکسیلیک اسیدها، گروهی از ترکیب‌های آلی هستند که در ساختار آن‌ها یک یا چند گروه عاملی کربوکسیل($-COOH$) وجود دارد. فرمول کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی(مولکول‌هایی که فقط یک گروه عاملی کربوکسیل دارند) را می‌توان به‌صورت $R-COOH$ نشان داد که در آن R نشان‌دهنده یک اتم هیدروژن و یا یک زنجیره هیدروکربنی است. کربوکسیلیک اسیدها خاصیت اسیدی داشته و pH محلول آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است. این ترکیب‌ها مزه‌ی ترش دارند به‌طوری‌که مزه‌ی ترش میوه‌هایی مانند ریواس، انگور، لیمو ترش، کیوی و گوجه سبز را به وجود چنین مولکول‌هایی در این میوه‌ها نسبت می‌دهند. متانوییک اسید یا همان فورمیک اسید به فرمول شیمیایی $HCOOH$، اولین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است که بر اثر گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود. ساختار مولکول‌های این ماده به‌صورت زیر است:



اتانوییک اسید یا همان استیک اسید با فرمول شیمیایی $CH_۳COOH$، یک کربوکسیلیک اسید دوکربنی و دومین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است. این ماده آشناترین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها بوده و یکی از پرکاربردترین اسیدها در زندگی روزمره است. به‌عنوان مثال، اسید موجود در سرکه همان استیک اسید است. ساختار مولکولی این ماده به‌صورت زیر است:



توجه داریم که فرمول شیمیایی کلی کربوکسیلیک اسیدهای یک عاملی سیرشده به‌صورت $C_nH_{۲n}O_۲$ است.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به توضیحات داده شده، در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، بوتانوئیک اسید دارای قدرت اسیدی کمتری بوده و چون در محلول خود به مقدار کمتری یونش پیدا می‌کند پس می‌توان گفت مقدار pH محلول این ماده در مقایسه با محلول استیک اسید، بیشتر است. چون بوتانوئیک اسید در مقایسه با استیک اسید دارای قسمت ناقطبی بزرگ‌تری است، پس انحلال‌پذیری این ماده در آب نیز کمتر از استیک اسید خواهد بود.

انحلال مواد آلی در آب

مولکول‌های سازنده برخی از ترکیب‌ها از جمله الکل‌ها، اسیدها و آمین‌ها، از دو بخش قطبی (گروه عاملی) و ناقطبی (بخش هیدروکربنی) تشکیل شده است. در این گروه از مواد، بین بخش قطبی و ناقطبی رقابت ایجاد شده و رفتارهای کلی مولکول‌های سازنده به میزان قدرت هر بخش بستگی دارد. به همین خاطر است که در الکل‌های کوچک (الکل‌های یک کربنه تا الکل‌های پنج کربنه)، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه داشته و الکل در آب محلول است. به دیگر سخن نیروی بین مولکولی غالب در الکل‌ها تا پنج کربن از نوع هیدروژنی بوده و به همین دلیل، این الکل‌ها به خوبی در آب حل می‌شوند. با افزایش شمار اتم‌های کربن، بخش ناقطبی مولکول الکل‌ها بزرگ‌تر شده و میزان قطبیت مولکول کاهش می‌یابد. این روند سبب می‌شود که الکل‌های بزرگ‌تر در آب نامحلول بوده و در چربی حل شوند. به همین دلیل است که می‌توان گفت در کربوکسیلیک اسیدها نیز با افزایش طول زنجیره کربنی، مقدار انحلال‌پذیری در آب کاهش پیدا می‌کند.

ماز

۷۳- چند میلی‌لیتر محلول هیدروسیانیک اسید با $pH = ۲/۵$ که در دمای ۲۵°C به میزان ۱/۵٪ یونش یافته است، می‌تواند ۲۵ میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار باریم هیدروکسید را به‌طور کامل خنثی کند؟

(معادله را موازنه کنید.) $HCN(aq) + Ba(OH)_۲(aq) \rightarrow Ba(CN)_۲(aq) + H_۲O(l)$

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$۲HCN(aq) + Ba(OH)_۲(aq) \longrightarrow Ba(CN)_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

یکی از رفتارهای جالب و پرکاربرد اسیدها و بازها، واکنش‌هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می‌شود. به این گروه از واکنش‌ها، به اصطلاح واکنش‌های خنثی‌شدن گفته می‌شود. طی واکنش‌های خنثی‌شدن، یون‌های هیدروکسید حاصل از بازها با یون‌های هیدرونیوم حاصل از ترکیب‌های اسیدی براساس معادله $OH^-(aq) + H_۳O^+(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول‌های آب را تولید می‌کنند. توجه داریم که هیدروسیانیک اسید، ضعیف‌ترین اسیدی است که در کتاب درسی به آن اشاره شده است. غلظت مولی محلول هیدروسیانیک اسید را با توجه به اطلاعات داده شده از آن به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-۲/۵} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۵} = ۳ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = M \times \alpha \Longrightarrow M = \frac{[H^+]}{\alpha} = \frac{۳ \times ۱۰^{-۳}}{\frac{۱/۵}{۱۰۰}} = \frac{۰/۳}{۱/۵} = ۰/۲\ mol.L^{-۱}$$

همان‌طور که می‌دانید، باریم هیدروکسید یک باز دو ظرفیتی است. در نهایت حجم محلول هیدروسیانیک اسید موردنیاز را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{M_۱ \times n_۱ \times V_۱}_{\text{هیدروسیانیک اسید}} = \underbrace{M_۲ \times n_۲ \times V_۲}_{\text{باریم هیدروکسید}} \Longrightarrow ۰/۲ \times ۱ \times V_۱ = ۰/۴ \times ۲ \times ۲۵ \Longrightarrow V_۱ = ۱۰۰\ mL$$

واکنش خنثی شدن

هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به‌طور کامل واکنش بدهد، به‌طوری‌که هر دو محلول کاملاً مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود.

$$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b$$

با استفاده از رابطه بالا، می‌توانیم بدون نیاز به محاسبات استوکیومتری، حجم محلول اسیدی/ بازی مورد نیاز را محاسبه کنیم.

ماز

۷۴- محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = ۲/۳$ و حجم ۴۰۰ میلی‌لیتر در اختیار داریم. برای افزایش pH این محلول به اندازه ۰/۷ واحد، به چند لیتر آب خالص نیاز داشته و هر لیتر از محلول ایجاد شده، با چند میلی‌گرم سود به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

($H = ۱$ و $O = ۱۶$ و $Na = ۲۳$: $g.mol^{-۱}$)

۱) ۲۰ - ۱/۲ ۲) ۴۰ - ۱/۲ ۳) ۲۰ - ۱/۶ ۴) ۴۰ - ۱/۶

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

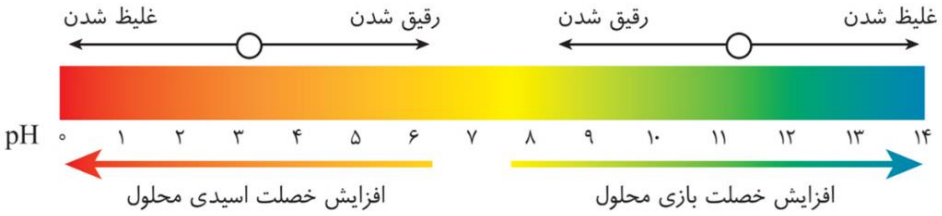
برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول محاسبه مقدار pH محلول جدید تولید شده

گام دوم محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول جدید ایجاد شده

گام سوم به‌دست آوردن مقدار سدیم هیدروکسید شرکت کرده در واکنش خنثی‌شدن

اگر محلول یک اسید را با افزودن آب خالص به آن رقیق‌تر کنیم، غلظت یون هیدروژن در آن کاهش یافته و pH محلول افزایش پیدا می‌کند(به عدد ۷ نزدیک‌تر می‌شود) و به همین ترتیب، اگر محلول یک باز را با اضافه‌کردن آب خالص به آن رقیق‌تر کنیم، غلظت یون هیدروکسید در محلول کاهش یافته و pH محلول نیز کم‌تر می‌شود(به عدد ۷ نزدیک‌تر می‌شود.). در چنین شرایطی می‌توان گفت اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $log\ (n)$ واحد به pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک‌تر می‌شود. در این رابطه، داریم:



طبق داده‌های سؤال، pH محلول از ۲/۳ به ۳ رسیده و ۰/۷ واحد تغییر کرده است، پس داریم:

$$log(n) = ۰/۷ \Longrightarrow n = ۱۰^{۰/۷} = ۵$$ برابر

محلول مورد نظر ۵ برابر رقیق‌تر شده است(غلظت آن $\frac{۱}{۵}$ برابر شده است)، پس می‌توان گفت طی این فرایند حجم محلول با استفاده از آب خالص ۵ برابر شده است. اگر حجم اولیه محلول برابر با V لیتر بوده است، طی این فرایند با استفاده از $۴V$ لیتر آب خالص، حجم محلول به $۵V$ لیتر رسیده است. بر این اساس، داریم:

$\Longrightarrow$ طی این فرایند حجم محلول به ۲۰۰۰ میلی‌لیتر(۲ لیتر) رسیده است $\Longrightarrow$ حجم محلول اولیه برابر با ۴۰۰ میلی‌لیتر بوده است

حجم آب مورد نیاز برابر با ۱/۶ لیتر بوده است $\Longrightarrow$ به محلول ۴۰۰ میلی‌لیتری اولیه، ۱۶۰۰ میلی‌لیتر آب خالص اضافه شده است

تغییر غلظت اسیدها و بازها

اسیدهای قوی به‌طور کامل یونش یافته$(\alpha = ۱)$ و با تغییر غلظت محلول آن‌ها، تغییری در درجه یونش این مواد ایجاد نمی‌شود. بر این اساس، داریم:

- اگر محلول یک اسید قوی مثل هیدروکلریک اسید را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را n برابر کنیم)، غلظت اسید و به دنبال آن غلظت یون هیدروژن $\frac{۱}{n}$ برابر شده و pH به اندازه $log\ n$ واحد به pH خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک می‌شود.
- اگر محلول یک اسید قوی را n مرتبه غلیظ کنیم(حجم محلول را با تبخیر کردن آب، $\frac{۱}{n}$ برابر کنیم و یا مقدار اسید موجود در محلول را n برابر کنیم)، غلظت اسید و به دنبال آن غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر n برابر شده و pH به اندازه $log\ n$ از pH خنثی$(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.

بازهای قوی به‌طور کامل یونش یافته$(\alpha = ۱)$ و با تغییر غلظت محلول آن‌ها، تغییری در درجه یونش این مواد ایجاد نمی‌شود. بر این اساس، داریم:

- اگر محلول یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم(حجم محلول را n برابر کنیم)، غلظت باز و به دنبال آن غلظت یون هیدروکسید $\frac{۱}{n}$ برابر شده و pH محلول به اندازه $log\ n$ واحد کاهش یافته و به pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ نزدیک می‌شود.
- اگر محلول یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم(حجم محلول را با تبخیر کردن آب از آن، $\frac{۱}{n}$ برابر کنیم و یا مقدار باز موجود در محلول را n برابر کنیم)، غلظت باز و به دنبال آن غلظت یون هیدروکسید در محلول n برابر شده و pH این محلول به اندازه $log\ n$ واحد افزایش یافته و از pH ناحیه خنثی$(pH = ۷)$ دورتر می‌شود.

مقدار pH محلول نهایی برابر با ۳ است، پس داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

هیدروکلریک اسید بر اساس معادله زیر با پودر سدیم هیدروکسید واکنش می‌دهد:

$$NaOH(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بر این اساس، داریم:

$$?\,mg\ NaOH = ۱\ L\ \text{محلول اسیدی} \times \frac{۱۰^{-۳}\ mol\ HCl}{۱\ L\ \text{محلول اسیدی}} \times \frac{۱\ mol\ NaOH}{۱\ mol\ HCl} \times \frac{۴۰\ g\ NaOH}{۱\ mol\ NaOH} \times \frac{۱۰۰۰\ mg\ NaOH}{۱\ g\ NaOH} = ۴۰\ mg$$

همان‌طور که مشخص است، طی این فرایند ۴۰ میلی‌گرم سود مصرف شده است.

ماز

۷۵- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ در شرایط یکسان، رسانایی یک نمونه از محلول لوله‌بازکن در مقایسه با محلول شیشه‌پاک‌کن کمتر خواهد بود.

ب ـ در شرایط استاندارد، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

ج ـ جوش شیرین موجب افزایش خاصیت پاک‌کنندگی صابون‌ها شده و در واحد فرمول آن ۶ اتم وجود دارد.

د ـ در واکنش محلول سود با محلول هیدروکلریک اسید، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نمی‌کنند.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، رسانایی الکتریکی هر محلول اسیدی یا بازی، وابسته به قدرت اسید یا باز حل شده در آن محلول است. چون سدیم هیدروکسید یک باز قوی و آمونیاک یک باز ضعیف است، پس می‌توان گفت در شرایط یکسان، رسانایی یک نمونه از محلول لوله بازکن(محلول سود) در مقایسه با محلول شیشه‌پاک‌کن(محلول آمونیاک) بیشتر است.

ب) در شرایط STP(دمای صفر درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب و یا سایر محلول‌های آبی کمتر از $۱۰^{-۱۴}$ می‌شود؛ درحالی که حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب در شرایط اتاق(دمای ۲۵ درجه سلسیوس و فشار ۱ اتمسفر) برابر با $۱۰^{-۱۴}$ می‌شود.

ج) از آن‌جا که اضافه‌کردن محلول سدیم هیدروژن کربنات ($NaHCO_۳$) به یک محلول دیگر، سبب کاهش غلظت یون هیدروژن در آن محلول می‌شود، می‌توان گفت که محلول سدیم هیدروژن کربنات یک محلول بازی با pH بزرگ‌تر از ۷ است. برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش‌شیرین(یا همان سدیم هیدروژن کربنات) می‌افزایند. اضافه‌کردن این ماده به شوینده‌ها، سبب افزایش خاصیت بازی آن‌ها می‌شود و قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها را افزایش می‌دهد.

ضد اسیدها

پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده، از داروهایی به نام ضد اسید(آنتی‌اسید) استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید($Mg(OH)_۲$)، آلومینیم هیدروکسید($Al(OH)_۳$) و سدیم هیدروژن کربنات(جوش‌شیرین یا $NaHCO_۳$) می‌شود. این مواد براساس معادله‌های زیر با اسید معده واکنش می‌دهند:

$$Mg(OH)_۲ \xrightarrow{\text{واکنش}} Mg(OH)_۲(aq) + ۲HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

$$Al(OH)_۳ \xrightarrow{\text{واکنش}} Al(OH)_۳(aq) + ۳HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳ \xrightarrow{\text{واکنش}} NaHCO_۳(aq) + HCl(aq) \rightarrow H_۲O(l) + CO_۲(g) + NaCl(aq)$$

همان‌طور که مشخص است، در ساختار جوش شیرین یون هیدروکسید وجود نداشته و این ماده به هنگام انحلال در آب، یون هیدروکسید ایجاد می‌کند.

د) معادله واکنش مورد نظر به‌صورت $NaOH(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l)$ است. طی این واکنش، یون هیدروکسید از محلول سود با یون هیدروژن از محلول هیدروکلریک اسید خنثی می‌شود. همان‌طور که مشخص است، یون‌های Na^+ و Cl^- در واکنش شرکت نکرده و به‌صورت دست‌نخورده باقی می‌مانند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۶- نوعی شربت ضد اسید دارای ۱۳٪ جرمی آلومینیم هیدروکسید و ۲۵/۲٪ جرمی سدیم هیدروژن کربنات است. چند گرم از این شربت برای تغییر pH یک نمونه ۷۵۰ میلی‌لیتری اسید معده از ۰/۳ به ۱/۷ نیاز است؟

$(Al = ۲۷ , Na = ۲۳ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$Al(OH)_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

معادله واکنش‌ها موازنه شود.

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌هایی با pH برابر ۰/۳ و ۱/۷ را حساب می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} \rightarrow \begin{cases} [H_۱^+] = ۱۰^{-۰/۳} = ۵ \times ۱۰^{-۱}\ mol.L^{-۱} \\ [H_۲^+] = ۱۰^{-۱/۷} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱} \end{cases}$$

برای اینکه pH محلول مورد نظر از ۰/۳ به ۱/۷ برسد، باید غلظت یون هیدرونیوم موجود در این محلول از ۰/۵ مول بر لیتر به ۰/۰۲ مول بر لیتر برسد. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت اسید خنثی شده} = \text{غلظت اولیه اسید} - \text{غلظت نهایی اسید} = ۰/۵ - ۰/۰۲ = ۰/۴۸\ mol.L^{-۱}$$

حجم محلول اسیدی برابر با ۷۵۰ میلی‌لیتر است، بنابراین مقدار یون هیدرونیوم موجود در این محلول باید از ۰/۳۷۵ مول به ۰/۰۱۵ مول رسیده و مقدار ۰/۳۶ مول از آن خنثی شود. آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات موجود در محلول ضد اسید، بر مبنای معادله‌های زیر با اسید معده واکنش می‌دهند:

$$Al(OH)_۳(s) + ۳HCl(aq) \rightarrow AlCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + CO_۲(g) + H_۲O(l)$$

آسیب معده

دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده در معده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. در این شرایط، اگر مقدار اسید موجود در معده به هر دلیلی بیش از اندازه باشد، مقدار یون‌های هیدرونیوم جذب‌شده توسط دیواره معده بیشتر شده و مقدار بیشتری از سلول‌های دیواره معده آسیب می‌بینند. پزشکان برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده بیماران مبتلا به بیماری‌های معده‌ای، از داروهایی به نام ضد اسید یا همان آنتی‌اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده(هیدروکلریک اسید) و افزایش مقدار pH محتویات معده می‌شوند.

با استفاده از معادله واکنش‌های بالا، باید ۰/۳۶ مول از هیدروکلریک اسید موجود در معده خنثی شود. توجه داریم که در هر ۱۰۰ گرم از این ضد اسید، مقدار ۱۳ گرم آلومینیم هیدروکسید و مقدار ۲۵/۲ گرم سدیم هیدروژن کربنات وجود دارد. مقدار هیدروکلریک اسیدی که با این ۱۰۰ گرم از این ضد اسید واکنش می‌دهد را حساب می‌کنیم:

$$?\,mol\ HCl = ۱۳\ g\ Al(OH)_۳ \times \frac{۱\ mol\ Al(OH)_۳}{۷۸\ g\ Al(OH)_۳} \times \frac{۳\ mol\ HCl}{۱\ mol\ Al(OH)_۳} = ۰/۵\ mol$$

$$?\,mol\ HCl = ۲۵/۲\ g\ NaHCO_۳ \times \frac{۱\ mol\ NaHCO_۳}{۸۴\ g\ NaHCO_۳} \times \frac{۱\ mol\ HCl}{۱\ mol\ NaHCO_۳} = ۰/۳\ mol$$

$$\text{مقدار کل اسید} = ۰/۵ + ۰/۳ = ۰/۸\ mol\ HCl$$

بنابراین، مقدار ۱۰۰ گرم از این ضد اسید با ۰/۸ مول هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد. در پایان مقدار ضد اسید مورد نیاز برای خنثی‌سازی ۰/۳۶ مول از اسید موجود در معده را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\ g\ \text{ضد اسید} = ۰/۳۶\ mol\ HCl \times \frac{۱۰۰\ g\ \text{ضد اسید}}{۰/۸\ mol\ HCl} = ۴۵\ g$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۷- کدام عبارت داده شده نادرست است؟

۱) تولید مواد، یکی از قلمروهای الکتروشیمی است که در آن از فرایندهای آبکاری و برقکافت استفاده می‌شود.
۲) همهٔ فلزها، هنگامی که در معرض هوا قرار می‌گیرند، با گاز اکسیژن واکنش داده و به شکل اکسید درمی‌آیند.
۳) تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، دستاوردی از الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته محقق می‌شود.
۴) با فرو بردن دو تیغه از جنس مس و روی در یک لیمو، می‌توان بخشی از انرژی شیمیایی را به انرژی الکتریکی تبدیل کرد.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی و حفظی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

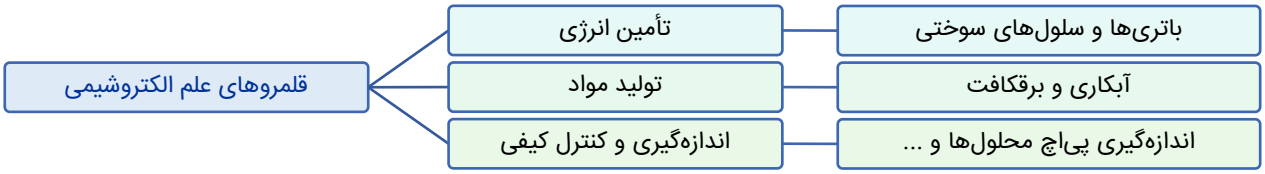
فلزهای نجیب مانند طلا و پلاتین با اکسیژن هوا واکنش نمی‌دهند، بنابراین باید گفت که اغلب فلزها هنگامی که در معرض هوا قرار می‌گیرند، با اکسیژن واکنش داده و به شکل اکسید درمی‌آیند. در این فرایند، اتم‌های فلزی اکسایش یافته و ذرات اکسیژن کاهش پیدا می‌کنند.

واکنش‌های اکسایش-کاهش

در محیط پیرامون ما واکنش‌های اکسایش-کاهش زیادی مانند سیاه شدن وسایل نقره‌ای، خوردگی آهن و سایر فلزات، فساد مواد غذایی و ... در حال انجام شدن هستند که مطلوب ما نبوده و گاهی زیان‌هایی را به دنبال دارند. برای مثال، سالانه صدها میلیون تن از فلزهای گوناگون برای ساختن اسکله نفتی، اسکلت ساختمان‌ها و پل‌ها، کشتی، لوکوموتیو و راه‌آهن و ... مصرف می‌شود. هنگامی که فلزها در مجاورت با اکسیژن هوا قرار می‌گیرند، اغلب اکسایش یافته و به شکل اکسید درمی‌آیند. خوردگی به فرایند تردشدن، خردشدن و فروریختن فلزها بر اثر واکنش‌های اکسایش-کاهش گفته می‌شود. زنگ‌زدن آهن، تیره‌شدن نقره و زنگار سبز ایجادشده بر سطح مس، نمونه‌هایی از فرایند خوردگی هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) تولید مواد جدید، یکی از قلمروهای دانش الکتروشیمی است که در آن فرایندهای آبکاری و برقکافت استفاده می‌شود. نمودار زیر، قلمروهای کلی دانش الکتروشیمی را نشان می‌دهد.

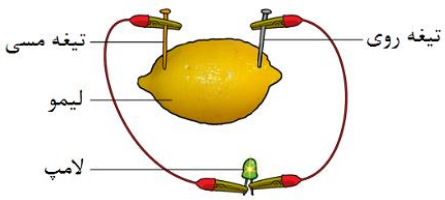


۳) آن‌چه که شیمی و الکتریسیته را به یکدیگر پیوند داده و علم الکتروشیمی را ایجاد می‌کند، الکترون است. به عبارتی، الکتروشیمی علم استفاده از انرژی الکتریکی برای ایجاد یک تغییر شیمیایی و یا تولید انرژی الکتریکی به کمک انجام واکنش‌های شیمیایی است. تولید انرژی پاک و ارزان، دستاوردی از دانش الکتروشیمی است که در سایه فناوری‌های پیشرفته موجب افزایش سطح رفاه و آسایش مردم جهان شده است.

نقش الکتروشیمی در زندگی

رشد دانش و پیشرفت فناوری، موجب آسان‌ترشدن انجام فعالیت‌های فردی، اقتصادی و صنعتی شده و افزایش سطح آسایش و رفاه در جامعه را به دنبال داشته است. تأمین روشنایی، گرمایش و سرمایش آسان‌تر، حمل و نقل سریع‌تر و ایمن‌تر، درمان و کاهش اثرات نقص عضو و انتقال ایمن آب آشامیدنی از نقطه‌ای به نقطه دیگر، نمونه‌هایی از افزایش سطح رفاه و آسایش در جامعه را نشان می‌دهند. دو رکن اساسی در تحقق این فناوری‌ها، دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی موردنیاز است.

۴) باتری لیمویی، نوع ساده‌ای از یک سلول الکتروشیمیایی است که با فروبردن یک تیغه از جنس فلز مس و یک تیغه از جنس فلز روی در یک لیمو ساخته می‌شود. توجه داریم که جنس دو تیغه فرو رفته در لیمو باید متفاوت از هم باشند. به کمک این نوع باتری می‌توان یک لامپ LED را روشن کرد. تصویر زیر، نمایی از این نوع باتری را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، لیمو در نقش الکترولیت بوده و باعث برقراری جریان الکتریکی در مدار خارجی می‌شود.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۷۸- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ واکنش میان منیزیم و گاز O_2 با تولید نور سفید همراه بوده و در فراورده آن، آرایش الکترونی یون‌ها مشابه هم است.

ب ـ باتری از فراورده‌های مهم صنعتی است که در محل مورد نیاز، با انجام واکنش‌های شیمیایی، الکتریسیته تولید می‌کند.

ج ـ در واکنش فلز آلومینیم با محلول مس(II) سولفات، تغییر بار الکتریکی گونه اکسنده، ۱/۵ برابر گونه کاهنده است.

د ـ در واکنش $3Mg(s) + N_2(g) \rightarrow Mg_3N_2(s)$، با تولید یک مول فراورده، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۴۲ ـ ۱۴۰۲)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف اغلب فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به اتم‌های نافلزی داده و ضمن اکسایش، به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها نیز با گرفتن یک یا چند الکترون، کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. بر این اساس، فلزها اغلب کاهنده و نافلزها اغلب اکسنده هستند. منیزیم(یک عنصر فلزی) در واکنش با اکسیژن(یک عنصر نافلزی) هوا اکسید شده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن انتقال می‌دهد. معادله نیم‌واکنش‌های انجام شده در این واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $Mg(s) \rightarrow 2e^- + Mg^{2+}(s)$

نیم‌واکنش کاهش: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

واکنش انجام‌شده به‌صورت $2Mg(s) + O_2(g) \rightarrow 2MgO(s)$ است که در آن اتم‌های Mg و مولکول‌های اکسیژن به‌ترتیب در نقش گونه‌های کاهنده و اکسنده ظاهر می‌شوند. فراورده‌های تولید شده در این نیم‌واکنش‌ها، هر دو دارای ۱۰ الکترون بوده و آرایش الکترونی مشابهی دارند. همان‌طور که مشخص است، طی این واکنش هر اتم منیزیم دو الکترون از دست داده و یک لایه الکترونی از اتم‌های آن کاسته می‌شود و به همین خاطر، شعاع اتم‌های این عنصر طی فرایند اکسایش، کوچک‌تر می‌شود. در گذشته از واکنش سوختن منیزیم به‌عنوان منبع نور در هنگام عکاسی استفاده می‌شد. طی این فرایند، فلز منیزیم با تولید نور خیره‌کننده‌ای در حضور اکسیژن می‌سوخت و به منیزیم اکسید تبدیل می‌شد.

اکسایش و کاهش

در واکنش‌های اکسایش-کاهش، الکترون از یک گونه به گونه دیگر منتقل می‌شود. در این واکنش‌ها، ماده‌ای که با گرفتن الکترون کاهش پیدا کرده و سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود، اکسنده نام دارد. در نقطه مقابل، ماده‌ای که با از دست دادن الکترون اکسایش پیدا کرده و سبب کاهش گونه دیگر می‌شود، کاهنده نام دارد. در رابطه با این دو گروه از مواد داریم:

گونه کاهنده است ← سبب کاهش گونه دیگر می‌شود ← گونه‌ای که اکسایش پیدا می‌کند

گونه اکسنده است ← سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود ← گونه‌ای که کاهش پیدا می‌کند

بر این اساس، می‌توان گفت:

الکترون می‌دهد ← گونه کاهنده الکترون می‌گیرد ← گونه اکسنده

ب یکی از کاربردهای واکنش‌های اکسایش-کاهش، استفاده از آن‌ها در ساختن انواع باتری‌ها است. باتری از فراورده‌های مهم صنعتی است که در محل مورد نیاز، با انجام واکنش‌های شیمیایی، بخشی از انرژی شیمیایی ذخیره شده در خود را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. ساختار و ویژگی‌های هر باتری متناسب با کارکرد ویژه‌ای است که آن باتری دارد. با رشد و پیشرفت صنایع گوناگون، نیاز و تقاضا برای ساختن باتری‌هایی با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش پیدا کرده است.

ج واکنش فلز آلومینیم با محلول مس(II) سولفات، به‌صورت زیر است:

$$2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$$

با توجه به معادله‌ی نوشته شده برای این واکنش شیمیایی، تغییر بار الکتریکی گونه کاهنده(فلز آلومینیم)، ۱/۵ برابر گونه اکسنده(یون مس) است. توجه داریم که با انجام این واکنش، از شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در فراورده واکنش، یون‌های Mg^{2+} و N^{3-} وجود دارند؛ بنابراین به ازای تولید یک مول ترکیب Mg_3N_2، مقدار $2 \times 3 = 6$ مول الکترون مبادله می‌شود. نام ترکیب تولید شده طی این فرایند منیزیم نیترید است. برای محاسبه تعداد الکترون مبادله شده در این واکنش‌ها، باید از رابطه زیر استفاده کرد:

زیروند × تغییر بار الکتریکی × ضریب ماده در معادله واکنش = تعداد الکترون مبادله شده

ماز

۷۹- طی واکنش محلول هیدروکلریک اسید با یک قطعه فلز روی، $3/01 \times 10^{22}$ الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شده است. طی این فرایند، چند میلی‌لیتر فراورده گازی در شرایطی که حجم مولی گازها برابر با ۴۴/۸ لیتر است، به‌دست می‌آید؟

۱) ۲۸۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۱۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحه ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

واکنش میان فلز روی و محلول هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:

$$Zn(s) + 2HCl(aq) \rightarrow ZnCl_2(aq) + H_2(g)$$

با توجه به معادله این واکنش، به ازای مبادله شدن ۲ مول الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، ۱ مول گاز هیدروژن تولید می‌شود. بر این اساس، حجم گاز هیدروژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mL\,H_2 = 3/01 \times 10^{22}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02 \times 10^{23}\,e} \times \frac{1\,mol\,H_2}{2\,mol\,e} \times \frac{44/8\,L\,H_2}{1\,mol\,H_2} \times \frac{1000\,mL\,H_2}{1\,L\,H_2} = 1120\,mL$$

با توجه به محاسبات انجام شده، طی این فرایند ۱۱۲۰ میلی‌لیتر گاز هیدروژن تولید شده است.

واکنش فلزها با اسیدها

به‌جز عناصر طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، سایر فلزها با یون هیدروژن موجود در محلول‌های اسیدی واکنش داده و گاز H_2 آزاد می‌کنند. طی این فرایند، فلز الکترون از دست داده و به‌صورت کاتیون وارد محلول می‌شود. برای مثال، سدیم براساس معادله $2Na(s) + 2HCl(aq) \rightarrow 2NaCl(aq) + H_2(g)$ با هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد. معادله واکنش کلی انجام شده بین عناصر فلزی با هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:

$$M(s) + xHCl(aq) \rightarrow MCl_x + \frac{x}{2}H_2$$

فلزهای موجود در گروه اول (لیتیم، سدیم، پتاسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۱+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه دوم (منیزیم، کلسیم، استرانسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار ۲+ وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه ۱۳ (آلومینیم و گالیم) نیز در قالب کاتیون‌هایی با بار ۳+ وارد محلول می‌شوند. توجه داریم که با افزایش واکنش‌پذیری فلز، افزایش غلظت حل‌شونده در محلول اسیدی و یا افزایش قدرت اسید (K_a) موجود در محلول، سرعت واکنش میان فلز با اسید افزایش یافته و گاز هیدروژن با سرعت بیشتری تولید خواهد شد.

ماز

۸۰- اطلاعات داده شده در جدول زیر، مربوط به قرار گرفتن تیغه‌های فلزی مختلف در محلول آهن(II) سولفات است:

جنس تیغه فلزی	آهن	روی	منیزیم	نقره
دمای اولیه	۳۰°C	۲۰°C	۲۰°C	۳۰°C
دمای نهایی	۳۰°C	۲۴°C	۲۶°C	۳۰°C

از میان فلزهای داده شده، فلز ..... بیشترین میل به از دست دادن الکترون را داشته و در صورت قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، دمای محلول ..... .

۱) منیزیم ـ افزایش می‌یابد ۲) منیزیم ـ ثابت باقی می‌ماند
۳) نقره ـ افزایش می‌یابد ۴) نقره ـ ثابت باقی می‌ماند

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

در یک واکنش اکسایش-کاهش، فلزی که قدرت کاهندگی بیشتری(تمایل بیشتر به از دست دادن الکترون) دارد، می‌تواند با کاتیون‌های فلزی حاصل از عناصری که قدرت کاهندگی کم‌تری دارند وارد واکنش شده و آن‌ها را به اتم‌های فلزی بکاهد. برای مقایسه تمایل فلزهای

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

مختلف به از دست دادن الکترون، می‌توانیم از واکنش این عناصر با یک محلول خاص در شرایط یکسان استفاده کنیم. هر فلزی که با محلول موردنظر با شدت بیشتری واکنش داده و دما را بیشتر افزایش دهد، تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد. در این رابطه، داریم:

افزایش دمای محلول به مقدار بیشتر ← افزایش تمایل اتم فلزی به از دست دادن الکترون(قدرت کاهندگی)

توجه داریم که اگر یک فلز، دمای محلول مورد نظر را افزایش ندهد، یعنی در مقایسه با فلزی که کاتیون آن در محلول وجود دارد، واکنش‌پذیری کمتری دارد.

مبادله انرژی در الکتروشیمی

هر واکنش شیمیایی، با گرفتن و یا دادن مقداری انرژی به محیط اطراف خود همراه است. در برخی از واکنش‌های اکسایش-کاهش، به هنگام دادوستد الکترون بین گونه‌های اکسنده و کاهنده، مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود. به‌عنوان مثال، در هنگام سوختن عناصر فلزی مثل سدیم و منیزیم، اتم‌های فلزی اکسایش پیدا کرده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن منتقل می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، انجام‌شدن این واکنش‌ها با آزادشدن مقداری انرژی به‌صورت نور و گرما همراه است. علاوه بر واکنش سوختن عناصر فلزی، برخی دیگر از انواع واکنش‌های اکسایش-کاهش نیز با آزادشدن گرما همراه هستند. به‌عنوان مثال، واکنش یک تیغه فلزی با محلول فلزی که واکنش‌پذیری کمتری دارد، از جمله واکنش‌های اکسایش-کاهش گرماده است.

طبق فرض سؤال، فلزهای روی و منیزیم دمای محلول مورد نظر را افزایش داده‌اند، پس این دو فلز در مقایسه با آهن واکنش‌پذیرتر هستند. چون منیزیم دمای محلول را به مقدار بیشتری افزایش داده است، پس می‌توان گفت این فلز در مقایسه با روی واکنش‌پذیرتر است. در این رابطه، داریم:

$$\text{واکنش‌پذیری} : Mg > Zn > Fe$$

چون فلز نقره دمای محلول را افزایش نداده است، پس می‌توان گفت نقره در مقایسه با آهن واکنش‌پذیری کمتری داد. اگر فلز نقره را به مقایسه قبلی اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{واکنش‌پذیری} : Mg > Zn > Fe > Ag$$

منیزیم، واکنش‌پذیرترین فلز از میان فلزهای داده شده است، پس این فلز بیشترین میل به از دست دادن الکترون را دارد. چون فلز روی از نقره واکنش‌پذیرتر است، در صورت قرار دادن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، واکنش زیر انجام می‌شود:

$$۲Ag^{+}(aq) + Zn(s) \rightarrow ۲Ag(s) + Zn^{۲+}(aq)$$

چون این واکنش گرماده است، دمای محلول افزایش پیدا می‌کند.

واکنش بین تیغه و محلول

کاتیون‌های فلزی موجود در یک محلول، در واکنش با اتم‌های یک عنصر فلزی دیگر که واکنش‌پذیری بیشتری دارند، یک یا چند الکترون از آن‌ها گرفته و کاهش پیدا می‌کنند. به‌عنوان مثال، هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار بدهیم، اتم‌های خنثای روی با از دست دادن دو الکترون به یون‌های روی اکسایش یافته و هم‌زمان با آن، هر یون مس(II) با دریافت همان دو الکترون، به اتم Cu کاهش می‌یابد. از آن‌جا که رنگ آبی محلول مس(II) سولفات به خاطر وجود یون‌های $Cu^{۲+}(aq)$ در این محلول است، با گذشت زمان و کاهش غلظت این یون در محلول موردنظر، به‌تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود.

ماز

۸۱- کدام موارد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ سوخت سبز از پسماند گیاهانی مانند سویا تهیه شده و تمام عناصر موجود در آن، جزو عناصر دسته p هستند.

ب ـ لایه اوزون، منطقه‌ای از تروپوسفر با بیشترین غلظت اوزون بوده و تا حدی، مانع از عبور پرتوهای فرابنفش می‌شود.

ج ـ مولکول اوزون، ساختار خمیده داشته و در برخورد با پرتوهای فرابنفش، به یک اتم اکسیژن و مولکول $O_۲$ می‌شکند.

د ـ ردپا، اصطلاحی است که می‌تواند بیانگر میزان اثرگذاری سبک زندگی هر یک از انسان‌ها بر کره زمین و هواکره باشد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۳ **(متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۷۳ ـ ۱۰۰۲)**

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بررسی موارد:

الف) سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر اتم‌های کربن و هیدروژن، اتم اکسیژن نیز دارد و در طبیعت به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شود. دو عنصر کربن و اکسیژن، جزو عناصر دسته p و عنصر هیدروژن، جزو عناصر دسته s جدول تناوبی است. سوخت‌های سبز از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آیند. این مواد زیست‌تخریب‌پذیر هستند؛ از این رو در طبیعت توسط جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تری تجزیه می‌شوند. اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از سوخت سبز هستند.

شیمی سبز

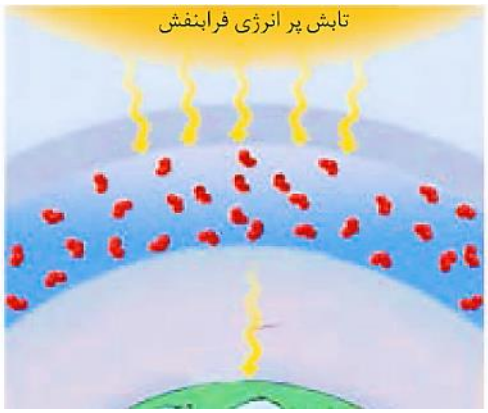
شیمی سبز شاخه‌ای از علم شیمی است که در آن شیمی‌دان‌ها در جستجوی فرایندها و فراورده‌هایی هستند که به کمک آن‌ها بتوان کیفیت زندگی را با بهره‌گیری از منابع طبیعی افزایش داد و هم‌زمان از طبیعت محافظت کرد. در این راستا بایستی تولید و مصرف مواد شیمیایی را که ردپاهای سنگینی روی کره‌ی زمین برجای می‌گذارند، کاهش داد یا به‌طور کامل متوقف کرد. شاخه‌های مختلفی از علم شیمی مثل الکتروشیمی و ...، به برقراری اصول شیمی سبز کمک می‌کنند. به‌طور کلی، اقدامات زیر در راستای پیاده‌سازی اصول شیمی سبز انجام می‌شوند:

- تولید سوخت سبز: سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد و از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید. این مواد زیست‌تخریب‌پذیرند، از این رو به وسیله جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند. اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.
- تبدیل CO_2 به مواد معدنی: برای جلوگیری از ورود کربن دی‌اکسید تولید شده توسط نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی، این گاز را با منیزیم اکسید یا کلسیم اکسید واکنش می‌دهند. معادله واکنش‌های شیمیایی انجام شده به‌صورت زیر است:

$$CO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaCO_3(s) \qquad CO_2(g) + MgO(s) \rightarrow MgCO_3(s)$$

- تولید پلاستیک‌های سبز: پلاستیک‌های سبز یا زیست‌تخریب‌پذیر، پلیمرهایی هستند که بر پایه‌ی مواد گیاهی مانند نشاسته ساخته می‌شوند و به همین دلیل، در ساختار آن‌ها اتم‌های اکسیژن نیز وجود دارند. این پلاستیک در مدت زمان نسبتاً کوتاهی توسط جانداران ذره‌بینی تجزیه می‌شود و به طبیعت باز می‌گردد. برای مثال، پلی‌لاکتیک اسید نمونه‌ای از پلیمرهای سازنده این پلاستیک‌ها است.
- دفن کردن کربن دی‌اکسید: کربن دی‌اکسید را می‌توان به جای رها کردن در هواکره، در مکان‌های عمیق و امن در زیر زمین ذخیره و نگهداری کرد. سنگ‌های متخلخل در زیر زمین، میدان‌های قدیمی گاز و چاه‌های قدیمی نفت که خالی از این مواد هستند، جاهای مناسبی برای دفن این گاز هستند.

ب) لایه اوزون، منطقه‌ای از استراتوسفر(دومین لایه از هواکره) است که بیشترین غلظت اوزون را داشته و به‌طور عمده(نه به‌طور کامل!) مانع عبور پرتوهای فرابنفش می‌شود. تصویر زیر، نمایی از لایه‌ی اوزون را نشان می‌دهد:

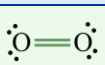
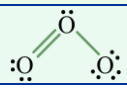


همان‌طور که مشخص است، مقدار کمی از پرتوهای فرابنفش خورشیدی از لایه اوزون رد شده و به سطح زمین رسیده‌اند. همان‌طور که می‌دانیم، در مولکول اوزون سه پیوند اشتراکی وجود دارد. هنگامی که تابش پرانرژی فرابنفش به این مولکول می‌رسد، پیوند اشتراکی یگانه‌ی بین دوتا از اتم‌های اکسیژن می‌شکند و مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می‌شود. ذره‌های تولید شده می‌توانند دوباره در واکنش با یکدیگر، مولکول اوزون را تولید کنند، اما در این واکنش، مقداری انرژی به‌صورت تابش فروسرخ آزاد می‌شود. با تکرار پیوستهٔ این دو واکنش، لایهٔ اوزون بخش قابل توجهی از تابش فرابنفش را جذب می‌کند و تابش‌های کم انرژی‌تر فروسرخ را به زمین گسیل می‌دارد.

ج) مولکول اوزون، ساختار خمیده دارد. تصویر زیر، نمایی از مولکول‌های سازنده این گاز را نشان می‌دهد:

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در ساختار مولکول اوزون سه پیوند اشتراکی(یک پیوند دوگانه و یک پیوند یگانه) وجود دارد. هنگامی که تابش پرانرژی فرابنفش به این مولکول می‌رسد، پیوند اشتراکی بین دوتا از اتم‌های اکسیژن می‌شکند و مولکول اوزون به یک اتم اکسیژن و یک مولکول اکسیژن تبدیل می‌شود. جدول زیر، ویژگی‌های مهم گاز اوزون و اکسیژن را نشان می‌دهد:

فرمول شیمیایی	ساختار لوویس	جرم مولی	نقطه جوش	رنگ در حالت گازی	رنگ در حالت مایع	مدل فضا پرکن
O_2		۳۲	-۱۸۳	بی‌رنگ	آبی روشن	
O_3		۴۸	-۱۱۲	آبی روشن	آبی تیره	

سبک زندگی انسان، نوع وسایلی که در زندگی استفاده می‌کند و رفتارهایی که در شرایط مختلف محیطی انجام می‌دهد، روی هواکره تأثیر می‌گذارد. در واقع، سبک زندگی هر فرد می‌تواند بیانگر میزان اثرگذاری هر یک از انسان‌ها بر کرهٔ زمین و هواکره باشد. ردپا، اصطلاحی است که به این اثر نسبت داده‌اند. یکی از این ردپاها، ردپای کربن دی‌اکسید است. برای اینکه مقدار کربن دی‌اکسید در هواکره از مقدار طبیعی آن فراتر نرود، باید مقدار اضافی کربن دی‌اکسید به وسیلهٔ گیاهان یا دیگر پدیده‌های طبیعی مصرف شود. حال هر چه مقدار کربن دی‌اکسید وارد شده به طبیعت زیادتر باشد، ردپای ایجاد شده سنگین‌تر و اثر آن ماندگارتر خواهد بود.

ردپای CO_2

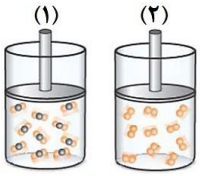
ردپای CO_2 نشان می‌دهد در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت، چه مقدار از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود. به ازای تولید یک مقدار مشخص انرژی الکتریکی با استفاده از باد، در مقایسه با انرژی خورشید، مقدار CO_2 کمتری تولید می‌شود. نمودار زیر، مقدار گاز CO_2 تولید شده در روش‌های مختلف را مقایسه می‌کند:

آلایندگی بیشتر ← زغال سنگ ← نفت خام ← گاز طبیعی ← انرژی خورشید ← گرمای زمین ← باد ← آلایندگی کمتر

توجه داریم که گاز طبیعی، نفت خام و زغال سنگ، از جمله سوخت‌های فسیلی به شمار رفته و در مقایسه با سایر منابع انرژی مثل خورشید و باد، ردپای کربن دی‌اکسید بیشتری را ایجاد می‌کنند.

ماز

۸۲- اگر مطابق شکل مقابل، هریک از سیلندرها حاوی ۰/۵ مول از گازهای CO_2 و O_2 در دما و فشار اتاق باشند، چند مورد از مطالب زیر درست هستند؟ $(O = 16 \text{ و } C = 12 : g.mol^{-1})$



الف ـ اگر دمای سیلندر (۱) را در مقیاس سلسیوس ۲ برابر کنیم، حجم گاز دو برابر می‌شود.

ب ـ با افزودن $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول O_2 به سیلندر (۲) در دمای ثابت، حجم گاز ۲ برابر می‌شود.

ج ـ در شرایط یکسان، چگالی CO_2 موجود در سیلندر اول، بیشتر از چگالی O_2 در سیلندر دوم است.

د ـ اگر در دمای ثابت، حجم سیلندر (۱) به اندازه ۲۵٪ افزایش پیدا کند، از فشار گاز CO_2، ۲۰ درصد کاسته می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی و مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۷۷ ـ ۱۰۰۲)

مطابق شکل داده شده، سیلندرهای (۱) و (۲) به‌ترتیب حاوی ۰/۵ مول از گازهای CO_2 و O_2 در دما و فشار اتاق هستند. در رابطه با این دو سیلندر، فقط عبارت (الف) نادرست بوده و عبارت‌های (ب)، (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) دمای اتاق، معادل با دمای ۲۵ درجه و دمای بدن، معادل با دمای ۳۷ درجه سلسیوس است. طبق فرض سؤال، دمای سیلندر (۱) در مقیاس سلسیوس برابر با $۲۵^\circ C$ است، پس دو برابر آن برابر با $۵۰^\circ C$ می‌شود؛ بنابراین داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{\theta_۲ + ۲۷۳}{\theta_۱ + ۲۷۳} = \frac{۳۲۳}{۲۹۸} \neq ۲$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

توجه داریم که اگر در فشار ثابت، دمای یک گاز را در مقیاس کلوین n برابر کنیم، حجم آن گاز n برابر می‌شود. ولی اگر در فشار ثابت، دمای گاز را در مقیاس سلسیوس n برابر کنیم، حجم آن گاز کمتر از n برابر افزایش می‌یابد.

ب) با افزودن $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول $O_۲$ (معادل با ۰/۵ مول $O_۲$) به سیلندر (۲) در دما و فشار ثابت، از آنجا که حجم یک گاز در دما و فشار ثابت با تعداد مول‌های آن متناسب است، حجم گاز $O_۲$ دو برابر می‌شود. در این رابطه داریم:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱} \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{۰/۵ + ۰/۵}{۰/۵} = ۲$$

قانون آووگادرو

در دما و فشار ثابت، حجم یک گاز با تعداد مول آن گاز، رابطه مستقیم دارد؛ یعنی داریم:

$V = \text{عدد ثابت} \times n$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$\frac{V_۲}{n_۲} = \frac{V_۱}{n_۱}$ یا $\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{n_۲}{n_۱}$

قانون آووگادرو بیان می‌کند که در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است. همان‌طور که می‌دانید، در شرایط STP، حجم یک مول از هر ماده‌ی گازی برابر با $۲۲/۴L$ است.

ج) در شرایط یکسان از نظر دما و فشار، نسبت چگالی دو گاز با نسبت جرم مولی آن دو گاز برابر است؛ بنابراین:

$$\frac{\text{چگالی گاز } CO_۲}{\text{چگالی گاز } O_۲} = \frac{\text{جرم مولی } CO_۲}{\text{جرم مولی } O_۲} = \frac{۴۴}{۳۲} = ۱/۳۷۵$$

د) در دمای ثابت، حاصل‌ضرب فشار و حجم یک گاز برابر با یک عدد ثابت است؛ بنابراین داریم:

$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲$$

با توجه به عبارت داده شده، $V_۲ = V_۱ + \frac{۲۵}{۱۰۰}V_۱$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{V_۱}{V_۲} \longrightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{V_۱}{۱/۲۵V_۱} = ۰/۸ \Rightarrow P_۲ = ۰/۸P_۱ = P_۱ - \frac{۲۰}{۱۰۰}P_۱ \Longrightarrow$$ فشار ۲۰٪ کاهش یافته است

ماز

۸۳- در مخلوطی از آمونیاک و اکسیژن، یک جرقه ایجاد می‌کنیم تا کل گاز آمونیاک موجود در مخلوط به‌طور کامل مصرف شود. اگر طی این فرایند ۷۵٪ از گاز اکسیژن موجود در مخلوط مصرف نشده باشد، درصد حجمی گاز آمونیاک در مخلوط اولیه به‌تقریب چقدر بوده است؟ (معادله واکنش موازنه شود $NH_۳(g) + O_۲(g) \rightarrow NO(g) + H_۲O(g)$)

۱) ۱۲/۸ ۲) ۲۵/۷ ۳) ۱۶/۶ ۴) ۳۳/۳

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۸۰ ـ ۱۰۰۲)

معادله موازنه شده واکنش به‌صورت زیر است:

$$۴NH_۳(g) + ۵O_۲(g) \rightarrow ۴NO(g) + ۶H_۲O(g)$$

در این واکنش، گاز آمونیاک سوخته و به گاز NO و بخار آب تبدیل می‌شود. مقدار مول آمونیاک اولیه را برابر با x مول در نظر می‌گیریم. در این صورت، طبق معادله موازنه شده واکنش مورد نظر، مقدار $۱/۲۵x$ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود. در این فرایند، ۲۵٪ از گاز اکسیژن مصرف شده و ۷۵٪ از آن در ظرف باقی مانده است. با توجه به اینکه مقدار مول اکسیژن مصرف شده در این فرایند، معادل با ۰/۲۵ برابر از کل گاز اکسیژن موجود در مخلوط اولیه بوده است، مقدار مول اولیه گاز اکسیژن را به دست می‌آوریم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mol\,O_۲ \text{ اولیه} = x\,mol\,NH_۳ \times \frac{۵\,mol\,O_۲ \text{ مصرف شده}}{۴\,mol\,NH_۳} \times \frac{۱\,mol\,O_۲ \text{ اولیه}}{۰/۲۵\,mol\,O_۲ \text{ مصرف شده}} = ۵x\,mol$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

می‌دانیم که در دما و فشار یکسان، یک مول از گازهای گوناگون حجم یکسانی دارند و در این شرایط، نسبت مولی دو گاز مختلف با نسبت حجمی آن‌ها برابر است؛ بنابراین با توجه به مقدار مول آمونیاک و اکسیژن در مخلوط اولیه، درصد حجمی آمونیاک را تعیین می‌کنیم:

$$\text{درصد حجمی آمونیاک} = \text{درصد مولی آمونیاک} = \frac{\text{مول آمونیاک در مخلوط اولیه}}{\text{مول آمونیاک در مخلوط اولیه} + \text{مول اکسیژن در مخلوط اولیه}} \times ۱۰۰$$

$$= \frac{x\ mol\ NH_۳}{x\ mol\ NH_۳ + ۵x\ mol\ O_۲} \times ۱۰۰ \simeq ۱۶/۶ \text{ درصد}$$

توجه داریم که آمونیاک یکی از مواد مهم در صنعت و کشاورزی است که کاربردهای بسیار زیادی دارد. به‌عنوان مثال، در کشاورزی آمونیاک مایع را به‌عنوان کود به‌طور مستقیم به خاک تزریق می‌کنند. آمونیاک گازی است که از واکنش گازهای نیتروژن و هیدروژن در دما و فشار بالا تولید می‌شود. معادله واکنش تولید گاز آمونیاک که به فرایند هابر نیز معروف است، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$N_۲(g) + ۳H_۲(g) \longrightarrow ۲NH_۳(g)$$

واکنش سوختن و اکسایش

در واکنش سوختن و یا اکسایش، یک ماده مثلاً یک ترکیب آلی مانند گاز متان، یک نافلز مانند گوگرد و یا یک فلز مانند منیزیم، با گاز اکسیژن ترکیب می‌شود و افزون بر آزاد کردن مقدار زیادی انرژی به‌صورت نور و گرما، اغلب ترکیب‌های اکسیژن‌دار را به وجود می‌آورد. به‌عنوان مثال، واکنش سوختن متان به‌صورت زیر است:

$$CH_۴(g) + ۲O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲O(l)$$

واکنش سوختن گوگرد نیز به‌صورت زیر است:

$$S(s) + O_۲(g) \rightarrow SO_۲(g)$$

فلز منیزیم نیز در شرایط مناسب، بر اساس معادله زیر می‌سوزد:

$$۲Mg(s) + O_۲(g) \rightarrow ۲MgO(s)$$

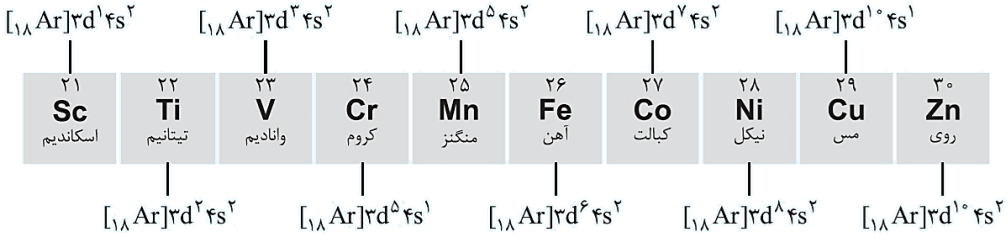
توجه داریم که معادله شیمیایی واکنش سوختن و یا اکسایش یک ماده، کاملاً مشابه هم است. تفاوت این دو واکنش، در سرعت انجام آن‌ها است. واکنش سوختن، با سرعت بالا انجام شده و دارای شعله رنگی است در حالی که واکنش اکسایش، با سرعت پایین‌تر انجام می‌شود و شعله ندارد.

۸۴- کدام عبارت داده شده نادرست است؟

۱) در وانادیم(III) اکسید، شمار آنیون‌ها ۱/۵ برابر کاتیون‌ها بوده و آرایش الکترونی کاتیون به زیرلایه $۳d^۳$ ختم می‌شود.
۲) بخش قابل توجهی از گرمای جذب شده توسط زمین، توسط امواجی با طول موج بیش از $۷۰۰nm$ بازتاب می‌شوند.
۳) در واحد فرمولی ترکیب اصلی موجود در سنگ معدن بوکسیت، بار کاتیون با زیروند یون اکسید برابر است.
۴) در توسعه پایدار، علاوه بر اصول شیمی سبز، ملاحظات اجتماعی، اقتصادی و زیست محیطی نیز در نظر گرفته می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۷۲ ـ ۱۰۰۲)

عدد یونانی موجود در نام برخی از ترکیب‌های یونی، بار الکتریکی کاتیون موجود در آن ترکیب را نشان می‌دهد. در ترکیب یونی وانادیم(III) اکسید با فرمول شیمیایی $V_۲O_۳$، نسبت شمار آنیون‌ها به کاتیون‌ها برابر با $\frac{۳}{۲} = ۱/۵$ بوده و آرایش الکترونی کاتیون(یون $V^{۳+}$) آن به زیرلایه $۳d^۲$ ختم می‌شود. توجه داریم که وانادیم در گروه پنجم جدول تناوبی قرار دارد. آرایش الکترونی اتم خنثای فلزهای واسطه تناوب چهارم به‌صورت زیر خواهد بود:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) بخش عمده‌ای از پرتوهای خورشیدی جذب زمین شده و زمین نیز بخش قابل توجهی از گرمای جذب شده را به‌صورت تابش فروسرخ از دست می‌دهد. توجه داریم که انرژی پرتوهای فروسرخ کمتر از انرژی امواج مرئی است؛ درنتیجه طول موج این پرتوها نیز بیشتر از

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

امواج مرئی است. می‌دانیم که طول موج امواج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر است؛ درنتیجه طول موج امواج فروسرخ بیشتر از ۷۰۰ نانومتر است. شکل زیر نحوه رسیدن پرتوهای خورشیدی به زمین و نحوه بازتاب این پرتوها از سطح زمین را بررسی می‌کند:

اثر گلخانه‌ای

زمین گرما را از پرتوهای خورشیدی گرفته و پس از آن، این گرما را به سمت هواکره بازتاب می‌کند. گازهای گلخانه‌ای از جمله بخار آب و گاز کربن دی‌اکسید موجود در هواکره زمین، مانع از خروج بخش کوچکی گرمای آزاد شده از زمین می‌شوند. طی این فرایند، مقداری از گرما در زمین محبوس شده و منجر به افزایش دمای کره زمین می‌شود. همانطور که گفتیم، گاز CO_2 از جمله گازهای گلخانه‌ای بوده و در سده اخیر، میزان ورود آن به هواکره بیشتر از میزان مصرف آن توسط گیاهان و ... بوده است. به همین خاطر است که غلظت گاز کربن دی‌اکسید در هواکره افزایش یافته و اثر گلخانه‌ای تشدید شده است. با تشدید این اثر، دمای هوای کره زمین بالاتر رفته و قسمتی از یخ‌های قطبی ذوب می‌شوند.

۳ در ترکیب اصلی سنگ معدن بوکسیت یعنی آلومینیم اکسید(Al_2O_3)، بار کاتیون ۳+ است که این مقدار، با تعداد یون‌های اکسید در واحد فرمولی این ترکیب برابر است.

۴ در توسعه پایدار با توجه به اصول شیمی سبز، می‌توان به توسعه اقتصادی، زیست محیطی و اجتماعی دست یافت. در واقع بر اساس توسعهٔ پایدار باید در تولید یک ماده یا عرضه خدمات، همهٔ هزینه‌ها و ملاحظه‌های اقتصادی، اجتماعی و زیست‌محیطی را در نظر گرفت، به‌طوری‌که اگر مجموع هزینه‌های بهره‌برداری از یک معدن یا یک منبع دیگر با در نظر گرفتن این ملاحظه‌ها کمترین مقدار ممکن باشد، در آن صورت جامعه در مسیر پیشرفت پایدار حرکت می‌کند. در چنین حالتی است که رفتارهای ما، آسیب کمتری به جامعه وارد می‌کند و ردپای زیست‌محیطی ما را کاهش می‌دهد.

ماز

۸۵- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

الف ـ یکی از کودهای نیتروژن‌دار، آمونیاک بوده و این ماده گاهاً به‌صورت مستقیم به خاک تزریق می‌شود.

ب ـ هنگام استفاده از گاز نیتروژن برای تنظیم باد خودرو، درصد اکسیژن در باد داخل تایر به صفر می‌رسد.

ج ـ هوای آلوده کلان‌شهرها به خاطر وجود یکی از فراورده‌های واکنش تولید اوزون تروپوسفری، قهوه‌ای‌رنگ است.

د ـ در حضور کاتالیزگر، واکنش گاز هیدروژن با نیتروژن همانند واکنش گاز هیدروژن با اکسیژن، به سرعت انجام می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

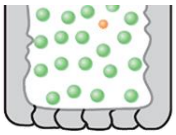
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۸۱ ـ ۱۰۰۲)

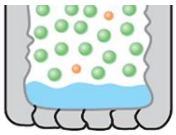
فقط عبارت (الف) درست است.

بررسی موارد:

الف کشاورزان کودهای شیمیایی نیتروژن دار را به خاک می‌افزایند. یکی از این کودها آمونیاک بوده و به‌طور مستقیم به خاک تزریق می‌شود. آمونیاک، مولکولی قطبی است و از فرایند هابر در شرایط بهینه تولید می‌شود. اوره، آمونیوم سولفات و آمونیوم نیترات، از جمله سایر کودهایی هستند که در شرایط مناسب، به خاک افزوده می‌شوند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud





ب) تصویر مقابل، نمایی از تایر یک خودرو را نشان می‌دهد که با استفاده از هوا و با استفاده از گاز نیتروژن پر شده است:

همان‌طور که مشخص است، حتی در زمان استفاده از گاز نیتروژن نیز مقداری گاز اکسیژن در میان مواد موجود در داخل تایر وجود دارد. در واقع با استفاده از گاز نیتروژن، مقدار بخار آب موجود در تایر خودرو به صفر می‌رسد؛ اما مقدار گاز اکسیژن موجود به صفر نمی‌رسد و فقط درصد آن از عدد ۲۱ به عدد ۵ درصد کاهش پیدا می‌کند.

گاز نیتروژن در تایر خودرو

پر کردن تایر با گاز نیتروژن، میزان بخار آب موجود در تایر را کاهش داده و بر این اساس، در روزهای زمستان حجم گازهای موجود در تایر به مقدار کمتری کاهش پیدا می‌کند. علاوه بر این، نیتروژن واکنش‌پذیری بسیار کمی داشته و برخلاف اکسیژن، با سایر گازهای موجود در هوا واکنش نمی‌دهد. گاز نیتروژن در مقایسه با هوا چگالی کمتری داشته و باعث کاهش جرم باد موجود در لاستیک می‌شود. اندازه بزرگ‌تر مولکول‌های نیتروژن، باعث می‌شود ذرات این گاز در مقایسه با اکسیژن، سخت‌تر از لاستیک خارج شوند.

ج) رنگ قهوه‌ای هوای آلوده‌ی کلان‌شهرها به خاطر وجود گاز نیتروژن دی‌اکسید(NO_2) در هوا است. واکنش تولید اوزون تروپوسفری به‌صورت زیر است:

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نور خورشید}} NO(g) + O_3(g)$$

گاز نیتروژن دی‌اکسید، واکنش‌دهنده‌ی این معادله است. توجه داریم که وجود نور خورشید برای انجام شدن این واکنش الزامی است.

د) گاز نیتروژن در مقایسه با گاز اکسیژن از نظر شیمیایی غیرفعال و واکنش‌ناپذیر است. برای نمونه مخلوطی از گازهای اکسیژن و هیدروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، در یک واکنش سریع و شدید منفجر می‌شود و آب تولید می‌کند اما در مخلوطی از گازهای نیتروژن و هیدروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه، هیچ واکنشی رخ نمی‌دهد. این واکنش در شرایط بهینه انجام می‌شود و برای اولین بار فریتس هابر آن را انجام داده است.

ماز

۸۶- مقدار ۱۳۶ گرم سدیم نیترات را بر اساس معادله موازنه نشده $NaNO_3(s) \rightarrow NaNO_2(s) + O_2(g)$ به‌طور کامل تجزیه کرده و گاز اکسیژن حاصل از آن را در واکنش سوزاندن مقدار کافی گلوکز مصرف می‌کنیم. طی این فرایند، چند گرم بخار آب تولید می‌شود؟ ($Na = ۲۳ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-1}$)

۱) ۲۵/۶ ۲) ۱۲/۸ ۳) ۲۸/۸ ۴) ۱۴/۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۷۹ ـ ۱۰۰۲)

در مسئله داده شده، یک ماده حد واسط (گاز اکسیژن) میان دو واکنش وجود دارد. این ماده در واکنش اول تولید شده و در واکنش دوم مصرف شده است. برای حل این سؤال، باید مراحل زیر را طی کنیم:

گام اول: محاسبه مقدار گاز اکسیژن تولید شده در واکنش اول

گام دوم: محاسبه جرم بخار آب حاصل از واکنش دوم

معادله واکنش تجزیه سدیم نیترات به‌صورت زیر است:

$$۲NaNO_3(s) \rightarrow ۲NaNO_2(s) + O_2(g)$$

با توجه به معادله این واکنش، مقدار گاز اکسیژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mol\ O_2 = ۱۳۶\ g\ NaNO_3 \times \frac{۱\ mol\ NaNO_3}{۸۵\ g\ NaNO_3} \times \frac{۱\ mol\ O_2}{۲\ mol\ NaNO_3} = ۰/۸\ mol$$

گلوکز یا همان قند خون، یک ترکیب قندی(کربوهیدرات) است که بر اساس معادله زیر به‌طور کامل می‌سوزد:

$$C_6H_{12}O_6(s) + ۶O_2(g) \rightarrow ۶CO_2(g) + ۶H_2O(g)$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

با توجه به معادله واکنش سوختن گلوکز، جرم بخار آب تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,H_2O = ۰/۸\,mol\,O_2 \times \frac{۶\,mol\,H_2O}{۶\,mol\,O_2} \times \frac{۱۸\,g\,H_2O}{۱\,mol\,H_2O} = ۱۴/۴\,g$$

البته، این سؤال را با استفاده از روش هم‌ارزی واکنش‌ها هم می‌توانستیم حل کنیم. برای استفاده از روش هم‌ارزی، ضریب اکسیژن را در دو معادله یکسان می‌کنیم. برای این منظور، باید معادله واکنش تجزیه سدیم نیترات را در ۶ ضرب کنیم. بر این اساس، داریم:

$$C_6H_{12}O_6(s) + 6O_2(g) \rightarrow 6CO_2(g) + 6H_2O(g) \qquad 12NaNO_3(s) \rightarrow 12NaNO_2(s) + 6O_2(g)$$

با توجه به معادله دو واکنش بالا، می‌توان گفت به ازای مصرف شدن ۱۲ مول سدیم نیترات در واکنش اول، ۶ مول بخار آب در واکنش دوم تولید می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,g\,H_2O = ۱۳۶\,g\,NaNO_3 \times \frac{۱\,mol\,NaNO_3}{۸۵\,g\,NaNO_3} \times \frac{۶\,mol\,H_2O}{۱۲\,mol\,NaNO_3} \times \frac{۱۸\,g\,H_2O}{۱\,mol\,H_2O} = ۱۴/۴\,g$$

۸۷- مقدار ۸۱ گرم گاز OF_2 با مقدار کافی گوگرد بر اساس معادله موازنه نشده $S(s) + OF_2(g) \rightarrow SO_2(g) + SF_4(g)$ واکنش می‌دهد. پس از اتمام این فرایند، تفاوت جرم فراورده‌های تولید شده برابر با چند گرم می‌شود؟

$(S = ۳۲ , F = ۱۹ , O = ۱۶ : g.mol^{-1})$

۱) ۱۱ ۲) ۲۲ ۳) ۳۳ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحه ۷۹ ـ ۱۰۰۲)

صورت موازنه شده این واکنش به شکل زیر است:

$$2S(s) + 2OF_2(g) \rightarrow SO_2(g) + SF_4(g)$$

با توجه به معادله موازنه شده این واکنش، جرم هریک از فراورده‌های تولید شده را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,g\,SF_4 = ۸۱\,g\,OF_2 \times \frac{۱\,mol\,OF_2}{۵۴\,g\,OF_2} \times \frac{۱\,mol\,SF_4}{۲\,mol\,OF_2} \times \frac{۱۰۸\,g\,SF_4}{۱\,mol\,SF_4} = ۸۱\,g$$

$$?\,g\,SO_2 = ۸۱\,g\,OF_2 \times \frac{۱\,mol\,OF_2}{۵۴\,g\,OF_2} \times \frac{۱\,mol\,SO_2}{۲\,mol\,OF_2} \times \frac{۶۴\,g\,SO_2}{۱\,mol\,SO_2} = ۴۸\,g$$

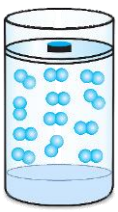
در قدم آخر، تفاوت جرم فراورده‌های تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تفاوت جرم فراورده‌ها} = ۸۱ - ۴۸ = ۳۳\,g$$

بر اساس محاسبات بالا، تفاوت جرم فراورده‌های این واکنش برابر ۳۳ گرم است. برای محاسبه مقدار خواسته شده در صورت سؤال با استفاده از یک روش سریع‌تر، به یک صورت دیگر هم می‌توانیم عمل کنیم. به ازای مصرف هر دو مول از گاز $OF_2(g)$ در این واکنش که جرمی معادل با ۱۰۸ گرم دارد، ۱ مول گاز گوگرد دی‌اکسید (که جرمی معادل با ۶۴ گرم دارد) و ۱ مول گاز گوگرد تترافلوئورید(که جرمی معادل با ۱۰۸ گرم دارد) تولید می‌شوند. به عبارتی، می‌توان گفت به ازای مصرف ۲ مول $OF_2(g)$ در این واکنش، تفاوت جرم فراورده‌های تولید شده برابر با ۴۴ گرم خواهد بود؛ پس داریم:

$$?\,g\,\text{تفاوت جرم} = ۸۱\,g\,OF_2 \times \frac{۱\,mol\,OF_2}{۵۴\,g\,OF_2} \times \frac{۴۴\,g\,\text{تفاوت جرم}}{۲\,mol\,OF_2} = ۳۳\,g$$

۸۸- تصویر مقابل، سیلندری با پیستون متحرک که محتوی مقداری گاز نیتروژن و محلولی از هیدروکلریک اسید است را نشان می‌دهد. کدام تغییر زیر، ارتفاع پیستون مورد نظر را کاهش می‌دهد؟



۱) انداختن یک قطعه کلسیم کربنات در ظرف
۲) افزایش دمای نمونه گازی موجود در سیلندر
۳) قرار دادن یک وزنه بر روی سطح پیستون
۴) جایگزینی گاز نیتروژن با همین مقدار گاز CO_2

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۷۸ ـ ۱۰۰۲)

اگر یک وزنه را روی سطح پیستون نشان داده شده قرار بدهیم، فشار گاز موجود در سیلندر افزایش پیدا می‌کند. با افزایش فشار یک نمونه گازی، حجم آن کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که با انداختن یک قطعه کلسیم کربنات در ظرف، این ماده با هیدروکلریک اسید موجود در ظرف واکنش داده و مقداری گاز کربن دی‌اکسید بر اساس معادله زیر تولید می‌کند:

$$۲HCl(aq) + CaCO_۳(s) \rightarrow CaCl_۲(aq) + H_۲O(l) + CO_۲(g)$$

با تولید گاز $CO_۲$، مقدار گاز موجود در سیلندر افزایش یافته و بر این اساس، حجم گاز نیز بیشتر می‌شود. توجه داریم که افزایش دمای یک نمونه گازی نیز حجم آن را افزایش می‌دهد. در صورت جایگزینی گاز نیتروژن با همین مقدار گاز $CO_۲$ نیز حجم اشغال شده توسط گاز، هیچ تغییری نکرده و ارتفاع پیستون دچار تغییر نمی‌شود.

ماز

۸۹- کدام موارد از عبارت‌های داده شده، در رابطه با یون کربنات و ترکیب‌های حاصل از آن درست است؟

الف ـ نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در واحد فرمولی ترکیب حاصل از این یون با یون روبیدیم، برابر ۱/۵ است.

ب ـ شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار این یون، برابر با شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار $SOCl_۲$ است.

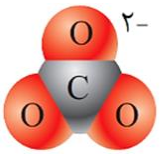
ج ـ این یون، بر اثر فرایند یونش و با استفاده از ترکیب اسیدی موجود در باران معمولی قابل تولید است.

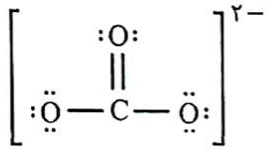
د ـ در فرایند تبدیل گاز $CO_۲$ به مواد معدنی در کارخانه‌ها، ترکیب‌های حاوی این یون تولید می‌شوند.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحه ۹۲ ـ ۱۰۰۳)

یون‌های چندتایی، گروهی از یون‌ها هستند که از اتصال چند اتم به یکدیگر تشکیل شده‌اند. برای مثال، به یون چندتایی زیر توجه کنید:



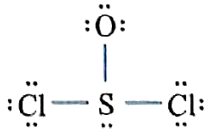


این یون چندتایی، کربنات نام داشته و فرمول آن به‌صورت $CO_۳^{۲-}$ است. در این یون، بین اتم‌ها پیوند اشتراکی برقرار شده است. در رابطه با این یون، عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) روبیدیم، فلزی از گروه اول جدول دوره‌ای بوده و کاتیونی با بار ۱+ را تشکیل می‌دهد. این کاتیون در ترکیب با یون کربنات، ماده یونی با فرمول شیمیایی $Rb_۲CO_۳$ را تشکیل می‌دهد. در واحد فرمولی این ماده، ۶ اتم و ۳ عنصر وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در واحد فرمولی روبیدیم کربنات برابر با ۲ است.

ب) ساختار مولکول $SOCl_۲$ به‌صورت زیر است:



در ساختار این مولکول، ۳ پیوند اشتراکی وجود دارد. در ساختار یون کربنات نیز ۴ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است.

ج) در باران‌های معمولی، کربنیک اسید وجود دارد. فرمول شیمیایی این ترکیب اسیدی به‌صورت $H_۲CO_۳$ است. در مرحله اول یونش، این ماده به یون هیدروژن کربنات با فرمول شیمیایی $HCO_۳^-$ تبدیل شده و این یون نیز مجدد می‌تواند یونش پیدا کند و به یون $CO_۳^{۲-}$ یا همان یون کربنات تبدیل شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

د) برای جلوگیری از ورود کربن دی‌اکسید تولید شده توسط نیروگاه‌ها و مراکز صنعتی به هواکره، این گاز را با منیزیم اکسید یا کلسیم اکسید واکنش می‌دهند. معادله واکنش‌های شیمیایی انجام شده به‌صورت زیر است:

$$CO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaCO_3(s) \qquad CO_2(g) + MgO(s) \rightarrow MgCO_3(s)$$

کلسیم کربنات و منیزیم کربنات تولید شده در این فرایند، حاوی یون کربنات هستند.

۹۰- کدام مطلب نادرست است؟

۱) لاشه جانوران، جزئی از زیست‌کره به حساب آمده و می‌توانند وارد هر سه بخش دیگر از سامانه تشکیل‌دهنده زمین شود.
۲) فراوان‌ترین کاتیون و آنیون موجود در آب دریا، از دسته یون‌های تک‌اتمی بوده و آرایش الکترونی آن‌ها متفاوت است.
۳) آب آشامیدنی محلولی همگن بوده و حاوی مقداری از یون‌های Na^+، Cl^- و برخی از یون‌های چنداتمی است.
۴) جرم آب‌های موجود بر روی کره زمین، تقریباً ۳ برابر جرم نمک حل شده در این آب‌ها است.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ حفظی ـ سریع ـ صفحه ۹۶ ـ ۳ ـ ۱۰۰۳)

جرم آب‌های موجود بر روی کره زمین، تقریباً ۳۰ برابر جرم نمک حل شده در این آب‌ها است. در واقع، درصد جرمی نمک در آب دریاها و اقیانوس‌ها تقریباً برابر با ۳/۵ درصد است و در نتیجه، در یک نمونه فرضی و ۱۰۰ گرمی از این آب‌ها، ۳/۵ گرم نمک و ۹۶/۵ گرم آب وجود دارد که جرم این آب، حدوداً ۳۰ برابر جرم نمک حل شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کره زمین را می‌توان سامانه‌ای بزرگ در نظر گرفت که شامل چهار بخش ۱) هواکره ۲) سنگ‌کره ۳) زیست‌کره و ۴) آب‌کره است. درون این سامانه و بین این چهار بخش به‌طور پیوسته مواد گوناگون مبادله می‌شوند؛ درنتیجه زمین از دیدگاه شیمیایی پویا است و بخش‌های گوناگون آن برهم‌کنش‌های فیزیکی و شیمیایی دارند. لاشه جانوران و گیاهان، بر اثر واکنش‌های شیمیایی تجزیه شده و به‌صورت مولکول‌های کوچک‌تر مانند آب، متان و ...، وارد هواکره، آب‌کره و سنگ‌کره می‌شوند.

۲) فراوان‌ترین کاتیون و آنیون موجود در آب دریا به‌ترتیب یون سدیم (Na^+) و یون کلرید (Cl^-) هستند و آرایش الکترونی این یون‌ها به‌ترتیب مشابه آرایش الکترونی Ne و Ar است. در ساختار یون سدیم، مجموعاً ۱۰ الکترون و در ساختار یون کلرید، مجموعاً ۱۸ الکترون وجود دارد.

یون‌های موجود در آب دریا

آب دریا محلولی از یون‌های مختلف است. اغلب این یون‌ها از سنگ‌کره وارد آب‌ها می‌شوند و در آن باقی می‌مانند. نکات زیر را راجع به یون‌های موجود در آب دریا به خاطر بسپارید:

- کاتیون عنصرهای گروه اول و دوم جدول دوره‌ای در آب دریا وجود دارند.
- مقدار یون کلرید از بقیه آنیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم: مقدار آنیون‌ها : $Cl^- > SO_4^{2-} > CO_3^{2-} > Br^-$
- مقدار یون سدیم از بقیه کاتیون‌های موجود در آب دریا بیشتر است. در این رابطه داریم: مقدار کاتیون‌ها : $Na^+ > Mg^{2+} > Ca^{2+} > K^+$
- یون سولفات فراوان‌ترین یون چنداتمی موجود در آب دریاها است.

۳) آب آشامیدنی، مخلوطی زلال و همگن بوده که حاوی مقدار کمی از یون‌های گوناگون است. برخی از این یون‌ها به‌طور طبیعی در آب حل شده و برخی دیگر در مراکز تأمین آب آشامیدنی سالم به آن افزوده می‌شود. برای نمونه به آب آشامیدنی، مقدار بسیار کم و مناسب یون فلوئورید می‌افزایند زیرا وجود این یون سبب حفظ سلامت دندان‌ها می‌شود. در برخی از آب‌های آشامیدنی مقدار یون‌های حل شده به قدری زیاد است که مزه آب را تغییر می‌دهد.

انواع آب

آب آشامیدنی با آب مصرفی در دیگر صنایع متفاوت است. در واقع، نوع و میزان یون‌های موجود در هر نمونه آب، متفاوت از دیگری است. در این حالت، ممکن است آبی برای شست‌وشو مناسب باشد اما آشامیدنی نباشد. هر چند که آب دریاها و اقیانوس‌ها، منبع بسیار بزرگی برای تهیه آب مورد نیاز بشر به شمار می‌آیند، اما این آب‌ها به اندازه‌ای شور هستند که باید قبل از مصرف، نمک‌زدایی و تصفیه شوند.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

۹۱- با توجه به واکنش زیر، چند گرم گوگرد لازم است تا ۶/۷۲ لیتر گاز NO_2 در شرایط STP تشکیل شود و نیتریک اسید مصرفی هم‌ارز چند لیتر محلول ۵۰۰۰ppm آن با چگالی $1 g.mL^{-1}$ است؟ ($g.mol^{-1}$: $S = 32, O = 16, N = 14, H = 1$)

معادلهٔ واکنش موازنه شود. $S(s) + HNO_3(aq) \rightarrow H_2SO_4(aq) + NO_2(g) + H_2O(l)$

۱) ۲/۵۲ ، ۱/۶ ۲) ۳/۷۸ ، ۱/۶ ۳) ۲/۵۲ ، ۳/۲ ۴) ۳/۷۸ ، ۳/۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۹۵ ـ ۱۰۰۳)

ابتدا معادله واکنش داده شده را موازنه می‌کنیم:

$$S(s) + 6HNO_3(aq) \longrightarrow H_2SO_4(aq) + 6NO_2(g) + 2H_2O(l)$$

سپس جرم گوگرد و نیتریک اسید مصرف شده در این واکنش شیمیایی را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,S = 6/72\,L\,NO_2 \times \frac{1\,mol\,NO_2}{22/4\,L\,NO_2} \times \frac{1\,mol\,S}{6\,mol\,NO_2} \times \frac{32\,g\,S}{1\,mol\,S} = 1/6\,g$$

$$?\,g\,HNO_3 = 6/72\,L\,NO_2 \times \frac{1\,mol\,NO_2}{22/4\,L\,NO_2} \times \frac{6\,mol\,HNO_3}{6\,mol\,NO_2} \times \frac{63\,g\,HNO_3}{1\,mol\,HNO_3} = 18/9\,g$$

در نهایت با در نظر گرفتن $d = 1 kg.L^{-1}$ یا همان $d = 1 g.mL^{-1}$، حجمی از محلول نیتریک اسید با غلظت ۵۰۰۰ppm را حساب می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت}(ppm) = \frac{\text{جرم حل شونده}(g)}{\text{جرم محلول}(g)} \times 10^6 \longrightarrow 5000\,ppm = \frac{18/9\,g\,HNO_3(aq)}{x} \times 10^6 \rightarrow x = 3780\,g$$

با توجه به محاسبات بالا، در این فرایند ۳۷۸۰ گرم محلول نیتریک اسید(معادل با ۳/۷۸ لیتر محلول نیتریک اسید) مصرف شده است.

غلظت ppm

مقیاس ppm، روشی برای بیان غلظت محلول‌ها و به ویژه محلول‌های خیلی رقیق است. غلظت ppm هر محلول، معادل با مقدار گرم حل‌شونده موجود در 10^6 گرم از آن محلول است. غلظت ppm حل‌شونده در یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم حل‌شونده+جرم حلال}} \times 10^6 \quad \text{یا} \quad ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6$$

در صورت و مخرج رابطه فوق، باید از یکای جرمی یکسان استفاده شود. توجه داریم که اگر محلول مورد نظر خیلی رقیق بوده و جرم حل‌شونده آن در مقایسه با جرم حلال خیلی کوچک باشد(مثلاً ۰/۱ گرم در مقابل ۱۰ کیلوگرم)، در مخرج رابطه مورد نظر می‌توانیم فقط جرم حلال را آورده و از جرم حل‌شونده صرف‌نظر کنیم. غلظت ppm یک محلول را می‌توان معادل با مقدار میلی‌گرم حل‌شونده موجود در هر کیلوگرم محلول(و یا هر لیتر محلول با چگالی $1 g.mL^{-1}$) در نظر گرفت. بر این اساس، رابطه محاسبه غلظت ppm را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت:

$$ppm = \frac{\text{میلی‌گرم حل‌شونده}}{\text{کیلوگرم محلول}} = \frac{\text{میلی‌گرم حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول (در صورتی که چگالی محلول برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر باشد)}}$$

۹۲- چند مول منیزیم سولفات را به ۲۴۰ گرم محلول منیزیم سولفات $20\,{}^{W}/_{W}$ اضافه کنیم تا محلول ۵۰ درصد جرمی منیزیم سولفات به‌دست بیاید؟ ($g.mol^{-1}$: $S = 32, Mg = 24, O = 16$)

۱) ۰/۴ ۲) ۱/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۱/۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحه ۹۶ ـ ۱۰۰۳)

هر محلول از دو قسمت حلال و حل‌شونده تشکیل شده است. غلظت، مؤلفه‌ای است که برای نشان دادن مقدار غلیظ و یا رقیق بودن محلول‌ها کاربرد دارد. درصد جرمی هر محلول، معادل با مقدار حل‌شونده موجود در ۱۰۰ گرم از آن محلول است. درصد جرمی حل‌شونده در یک محلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم حل‌شونده + جرم حلال}} \times 100 \quad \text{یا} \quad \text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

در صورت و مخرج رابطه فوق، باید از یکای یکسان(مثل گرم، میلی‌گرم و یا کیلوگرم) استفاده شود. ابتدا جرم منیزیم سولفات را در محلول اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$\text{درصد جرمی منیزیم سولفات} = \frac{\text{جرم منیزیم سولفات}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{جرم منیزیم سولفات} = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲۴۰ = ۴۸\ g$$

فرض می‌کنیم با افزودن M گرم منیزیم سولفات، درصد جرمی این نمک در محلول مورد نظر به ۵۰٪ برسد. در این حالت، جرم نمک موجود در محلول برابر با $۴۸ + M$ گرم شده و جرم کل محلول نیز برابر با $۲۴۰ + M$ گرم می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$۵۰ = \frac{۴۸ + M}{۲۴۰ + M} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۵۰M = ۷۲۰۰ \Rightarrow M = ۱۴۴\ g$$

و در نهایت تعداد مول منیزیم سولفات موردنیاز را محاسبه می‌کنیم:

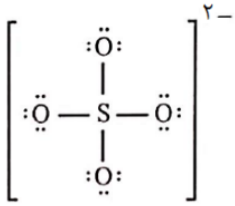
$$?\ mol\ MgSO_۴ = ۱۴۴\ g\ MgSO_۴ \times \frac{۱\ mol\ MgSO_۴}{۱۲۰\ g\ MgSO_۴} = ۱/۲\ mol$$

۹۳- کدام عبارت داده شده درست است؟

۱) منابع غیر اقیانوسی، سهم کمی از آب‌های کره زمین را شامل شده و همه آن‌ها در دسته آب‌های شیرین قرار می‌گیرند.
۲) در ساختار فراوان‌ترین یون چنداتمی موجود در آب دریا، ۴ پیوند اشتراکی و ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.
۳) آمونیوم کربنات، یک ترکیب یونی چندتایی بوده و اتم‌های سازنده یون‌های آن، همگی در یک صفحه قرار می‌گیرند.
۴) از ریختن مقداری محلول باریم سولفات بر روی محلول سدیم کلرید، رسوب سفیدرنگ باریم کلرید ایجاد می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ سریع ـ صفحه ۹۰ ـ ۱۰۰۳)

فراوان‌ترین یون چنداتمی موجود در آب دریاها، یون سولفات($SO_۴^{۲-}$) است. در ساختار هر یون سولفات، ۴ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است. همچنین در ساختار این یون، ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. ساختار لوویس این یون به‌صورت زیر است:

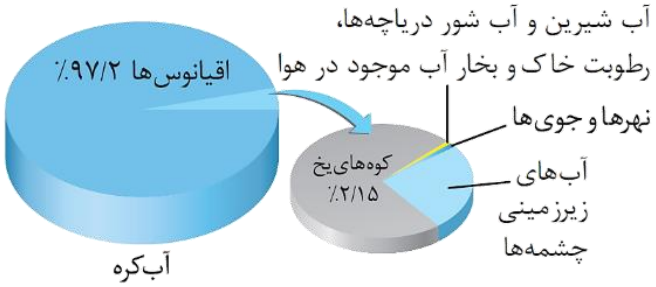


بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آب‌های کره زمین را در یک تقسیم‌بندی کلی در دو گروه اقیانوسی و غیر اقیانوسی قرار می‌دهند. در حدود ۹۷/۲ درصد آب‌کره در اقیانوس‌ها و ۲/۸٪ آن به صورت‌های دیگر وجود دارد. عمده منابع غیر اقیانوسی را کوه‌های یخ و سپس آب‌های زیرزمینی تشکیل می‌دهند. در این رابطه، داریم:

مجموعه آب دریاچه‌ها، رطوبت خاک و بخار آب < آب نهرها و جوی‌ها < آب‌های زیرزمینی < کوه‌های یخ

تصویر زیر، نمایی از تقسیم‌بندی منابع آبی کره زمین را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، آب شور موجود در برخی از دریاچه‌ها نیز در دسته منابع غیر اقیانوسی آب قرار می‌گیرد.

www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

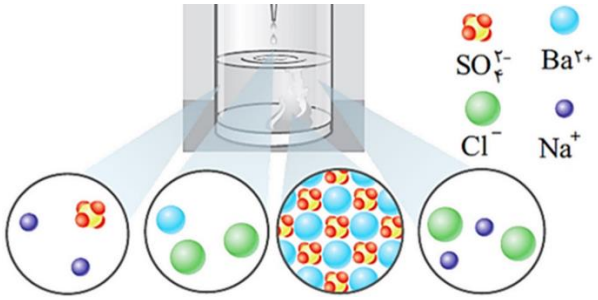
۳ آمونیوم کربنات با فرمول شیمیایی $(NH_4)_2CO_3$، یک ترکیب یونی چندتایی(انواعی از ترکیب‌های یونی که در ساختار آن‌ها اتم‌هایی از بیشتر از ۲ عنصر مختلف وجود داشته باشد) است. ساختار یون‌های سازنده این ماده به‌صورت زیر خواهد بود:

با توجه به تصویر بالا، اتم‌های سازنده یون کربنات، همگی در یک صفحه قرار می‌گیرند در حالی که اتم‌های سازنده یون آمونیوم، همگی در یک صفحه قرار نداشته و این یون، یک ساختار برآمده و سه‌بعدی دارد.

۴ برخی از یون‌ها در واکنش با یکدیگر، فراورده‌های نامحلول در آب را تولید می‌کنند. برای مثال، از ریختن محلول بی‌رنگ باریم کلرید بر روی محلول بی‌رنگ سدیم سولفات، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات با فرمول شیمیایی $BaSO_4$ ایجاد می‌شود. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$BaCl_2(aq) + Na_2SO_4(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$$

رسوب ایجاد شده طی این واکنش، باریم سولفات است که رنگ سفید دارد. درواقع از این واکنش، برای تشخیص وجود یون باریم(Ba^{2+}) در یک محلول استفاده می‌شود.



۹۴- اگر تفاوت شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها در ۴۰۰ میلی‌لیتر از محلول آمونیوم سولفات برابر با $2/408 \times 10^{21}$ باشد، با اضافه کردن ۱۰۰ میلی‌لیتر آب مقطر به این محلول، غلظت یون آمونیوم در محلول مورد نظر به اندازه چند ppm تغییر می‌کند؟ (چگالی محلول را برابر با $1 g.mL^{-1}$ در نظر بگیرید. $S = 32, O = 16, N = 14, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحه ۹۵ ـ ۱۰۰۳)

توجه داریم که صورت سؤال، تفاوت شمار آنیون‌ها و کاتیون‌ها را به ما داده است. فرمول شیمیایی آمونیوم سولفات به‌صورت $(NH_4)_2SO_4$ است. در یک مول از ترکیب $(NH_4)_2SO_4$، اختلاف شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها معادل یک مول است، پس می‌توان گفت در این ترکیب دو مول کاتیون به ازای یک مول آنیون وجود دارد. ابتدا جرم یون آمونیوم موجود در محلول اولیه را برحسب میلی‌گرم به‌دست می‌آوریم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mg\ NH_4^+ = 2/408 \times 10^{21}\ \text{تفاوت شمار یون‌ها} \times \frac{1\ mol\ \text{تفاوت شمار یون‌ها}}{6/02 \times 10^{23}\ \text{تفاوت شمار یون‌ها}} \times \frac{2\ mol\ NH_4^+}{1\ mol\ \text{تفاوت شمار یون‌ها}}$$

$$\times \frac{18\ g\ NH_4^+}{1\ mol\ NH_4^+} \times \frac{1000\ mg\ NH_4^+}{1\ g\ NH_4^+} = 144\ mg$$

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

بنابراین جرم یون آمونیوم در محلول اولیه (و همچنین محلول نهایی) برابر $۱۴۴mg$ است. برای به‌دست آوردن غلظت ppm یون آمونیوم، کافی است حساب کنیم در یک لیتر از محلول اولیه و محلول نهایی چند میلی‌گرم یون آمونیوم وجود دارد. بر این اساس، داریم:

$$\text{محلول اولیه}: ?\,mg\ NH_4^+ = ۱L\ \text{محلول} \times \frac{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}}{۱L\ \text{محلول}} \times \frac{۱۴۴mg\ NH_4^+}{۴۰۰\ mL\ \text{محلول}} = ۳۶۰\ mg$$

$$\text{محلول نهایی}: ?\,mg\ NH_4^+ = ۱L\ \text{محلول} \times \frac{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول}}{۱L\ \text{محلول}} \times \frac{۱۴۴mg\ NH_4^+}{(۴۰۰+۱۰۰)\ mL\ \text{محلول}} = ۲۸۸\ mg$$

بنابراین غلظت یون آمونیوم در محلول اولیه برابر با $۳۶۰ppm$ و در محلول نهایی برابر $۲۸۸ppm$ است. طی این فرایند، غلظت یون مورد نظر به اندازه ۷۲ واحد تغییر کرده است.

برخی از مواد هستند که اگر جرم مولی آن‌ها را حفظ باشید، سرعت حل سؤال شما در مباحث اسید و باز، محلول‌ها و استوکیومتری، به مقدار خیلی زیادی افزایش پیدا می‌کند.

جدول زیر لیستی از این مواد و جرم مولی آن‌ها را نشان می‌دهد:

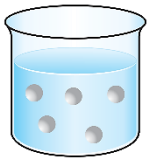
ترکیب	فرمول شیمیایی	جرم مولی
متان	CH_4	۱۶
اتان	C_2H_6	۳۰
اتن	C_2H_4	۲۸
اتین	C_2H_2	۲۶
کربن دی‌اکسید	CO_2	۴۴
متانول	CH_3OH	۳۲
اتانول	C_2H_5OH	۴۶
متانوئیک اسید	$HCOOH$	۴۶
اتانوئیک اسید	CH_3COOH	۶۰
گلوکز	$C_6H_{12}O_6$	۱۸۰
سولفوریک اسید	H_2SO_4	۹۸
نیتریک اسید	HNO_3	۶۳
هیدروژن فلوئورید	HF	۲۰

ترکیب	فرمول شیمیایی	جرم مولی
آب	H_2O	۱۸
سدیم نیترات	$NaNO_3$	۸۵
پتاسیم نیترات	KNO_3	۱۰۱
نقره نیترات	$AgNO_3$	۱۷۰
نقره کلرید	$AgCl$	۱۴۳/۵
آهن(III) اکسید	Fe_2O_3	۱۶۰
سدیم کلرید	$NaCl$	۵۸/۵
منیزیم کلرید	$MgCl_2$	۹۵
سدیم هیدروکسید	$NaOH$	۴۰
منیزیم هیدروکسید	$Mg(OH)_2$	۵۸
منیزیم سولفات	$MgSO_4$	۱۲۰
کلسیم کربنات	$CaCO_3$	۱۰۰
منیزیم کربنات	$MgCO_3$	۸۴

توجه کنید که هیچ اجباری به حفظ کردن جرم مولی این مواد ندارید و در همه سؤالات شیمی، جرم مولی عناصر حتماً به شما داده می‌شود، اما با حفظ بودن جرم مولی این مواد، سرعت حل سؤال شما به مقدار زیادی افزایش پیدا می‌کند.

ماز

۹۵- کدام عبارت داده شده نادرست است؟



۱) آمونیوم سولفات یک کود شیمیایی بوده و عناصر نیتروژن و گوگرد را در اختیار گیاهان قرار می‌دهد.
۲) اگر جرم حل‌شونده موجود در محلول مقابل را ۲ برابر کنیم، درصد جرمی این محلول ۲ برابر می‌شود.
۳) از نمک خوراکی برای تولید سدیم کربنات، تهیه گاز هیدروژن و تهیه سود سوزآور استفاده می‌شود.
۴) اگر جرم برابر از آب و اتانول را با هم مخلوط کنیم، محلولی ایجاد می‌شود که آب، حلال آن به شمار می‌رود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحه ۹۸ ـ ۱۰۰۳)

درصد جرمی هر محلول، با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

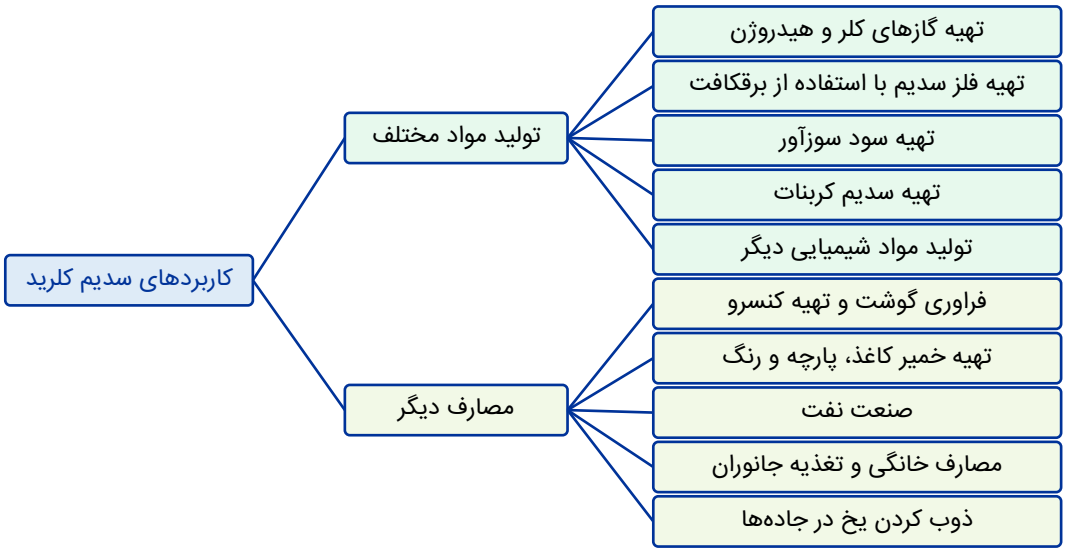
$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰$$

با توجه به رابطه درصد جرمی، اگر جرم حل‌شونده موجود در یک محلول را دو برابر کنیم، صورت کسر مربوط به محاسبه درصد جرمی ۲ برابر می‌شود اما جرم محلول مورد نظر نیز نسبت به مقدار اولیه افزایش پیدا می‌کند؛ پس درصد جرمی این محلول کمتر از ۲ برابر حالت اولیه می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آمونیوم سولفات با فرمول شیمیایی $(NH_۴)_۲SO_۴$، یک کود شیمیایی است. این کود شیمیایی، دو عنصر نیتروژن و گوگرد را در اختیار گیاهان قرار می‌دهد. علاوه بر نیتروژن و گوگرد، گیاهان به عناصر فسفر و پتاسیم نیز احتیاج دارند که با استفاده از کودها و سایر مواد موجود در خاک، این نیازهای خود را برطرف می‌کنند.

۳) سدیم کلرید(نمک خوراکی) را می‌توان با استفاده از فرایند برقکافت و به کمک سلول‌های الکترولیتی به عناصر سازنده آن تجزیه کرد. نمودار زیر، کاربردهای سدیم کلرید را نشان می‌دهد.



با توجه به نمودار بالا، از نمک خوراکی برای تولید سدیم کربنات، تهیه گاز کلر، تهیه گاز هیدروژن و تهیه سود سوزآور(سدیم هیدروکسید) استفاده می‌شود.

۴) هر محلول، از یک حلال و یک یا چند حل‌شونده تشکیل شده است. حلال ماده‌ای است که شمار مول‌های بیشتری داشته و حل‌شونده را در خود حل می‌کند. برای مثال، در محلول آب نمک، آب در نقش حلال بوده و نمک در نقش حل‌شونده است. اگر جرم برابر از آب و اتانول را با هم مخلوط کنیم، مقدار مول آب بیشتر از مقدار مول اتانول شده و در نتیجه، محلولی ایجاد می‌شود که آب، حلال آن به شمار می‌رود. توجه داریم که برای بیان مقدار حل‌شونده موجود در یک محلول، از انواع مختلف غلظت‌ها استفاده می‌شود.

سنجش کلاد
www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud